

Modelado 2.5D del flujo de corriente eléctrica en medios rocosos con presencia de fracturas

Víctor Caballero Sanz

4 de octubre de 2015

Agradecimientos

Este trabajo es el resultado de mucho esfuerzo por mi parte, indudablemente, pero también por parte de muchas otras personas, que de una forma u otra han puesto su granito de arena para que todo haya sido más sencillo y llevadero durante toda la carrera, y en especial, durante este proyecto. Es por eso que quiero agradecer brevemente su apoyo con estas líneas.

Empezando por la familia, me gustaría agradecer a mis padres todo el trabajo hecho conmigo desde pequeño, por hacer de mí una persona constante, trabajadora y buena: gracias por ser mi ejemplo y por seguir al pie del cañón desde siempre. A mi hermana, porque sabes que eres muy importante. . . Y además, me habría aburrido sin ti. A mis tíos Antonio, Goyo, Juan y Juanan, a mis tías Merce, Nieves, Tere y Tomasa, a mis primos Álex, Alfon, Ángel, Antonio, Basel, Juan y Juanan, a mis primas Elena, Marta, Nuri y Patri, a los hijos de primos y primas Carmen, el pequeñajo Eric y Pablo: porque somos una piña, y una parte de este trabajo es vuestro también. En especial, a aquellos que no han podido llegar a leer estas líneas: tíos Goyo y Juan y abuelos Antonio, José, Juana y Mari, porque sé que desde donde estáis podréis estar orgullosos. A Alina, Diego, Joaquín, Laura abuela, Laura tía, Lina y Noe, porque también sois mi familia, lo habéis demostrado con creces. Gracias.

Porque los amigos se hacen el primer día de universidad, muchas gracias a vosotros también chicos: Adri, Casado, Dani y Jorge, porque sin vosotros no tendría tantas cosas buenas que contar de estos 5 años. Muchas gracias también a Albert, Chema, Fer, Rober y Pedro, porque sin vuestros apuntes aun estaría en clase.

Aunque haya convivido con ellos sólo 6 meses, han sido mi pequeña familia Suiza, y querría agradecerles igualmente todo su apoyo. A Nico y Sofi, gracias por esos viajes; a Luis, desde luego un gran amigo, y una gran persona; a Damien y Marina, muchas gracias por esa última fondue y por todas las tardes de mundial en vuestra casa; a German, el mayor meteorólogo que he conocido y Anahí, porque nadie imita como tú a los españoles, para que nos vamos a engañar; a los dos, enhorabuena por vuestra niña. Muchas gracias a todos, de corazón.

No podría añadir a todas las personas que han pasado por mi vida deportiva, porque no tendría espacio suficiente, así que me gustaría agradecer a todas las personas que han estado día a día entrenando a mi lado el apoyo, la entrega y la ayuda desinteresada que me han ofrecido en todo momento. Mención aparte merecen mis profes Jesús Martínez y Carlos Sotillo, que desde que llegué han dado todo para que crezca como judoka y como persona. Os he estado viendo la cara todos los días durante muchos años, y habéis formado una parte muy importante de mi vida desde entonces. Muchas gracias a toda la familia del Judo Club Sotillo.

Me gustaría agradecer especialmente el apoyo dado por las dos personas que quizá más me han influido profesional, deportiva y personalmente: mi primo Alfon, que ha sido mi profe, mi apoyo, mi guía y mi hermano mayor: nada de esto habría sido posible sin ti; y mi novia, Noe, que con sus ganas y optimismo es capaz de lograr cualquier cosa con solo una sonrisa. Te quiero. Mil gracias a los dos.

Para terminar, me gustaría agradecer enormemente a todos los profesores de la carrera su pequeña o gran aportación a mis conocimientos generales, y en especial a Javier Rodríguez, mi tutor, que además de haberme facilitado la posibilidad de realizar esta beca en Suiza, ha sido posiblemente el mejor profesor que haya tenido en estos 5 años, sin lugar a dudas: muchas gracias por transmitir el entusiasmo e interés que muestras en tus clases, son tu mejor arma.

Por último, un especial agradecimiento a Delphine Roubinet y James Irving, mis dos tutores suizos que hicieron posible este trabajo, desde su confianza al elegirme hasta su apoyo y ayuda durante los 6 meses que duró la experiencia. Muchas gracias por todo.

Glosario

Por orden de aparición en el texto:

- $\rho \equiv$ Resistividad eléctrica del terreno [Ωm]
- $H \equiv$ Humedad relativa del suelo [% en peso]
- $\theta \equiv$ Temperatura del suelo [$^{\circ}C$]
- $\sigma \equiv$ Conductividad eléctrica del terreno [Sm^{-1}]
- $I \equiv$ Intensidad de corriente eléctrica [A]
- $\phi(r) \equiv$ Campo de potencial eléctrico del terreno en 3D [V]
- $\sigma_{aire} \equiv$ Conductividad eléctrica del aire [Sm^{-1}]
- $\phi_M \equiv$ Potencial eléctrico del punto M en el que se sitúa uno de los electrodos de potencial del método ERT [V]
- $\phi_N \equiv$ Potencial eléctrico del punto N en el que se sitúa uno de los electrodos de potencial del método ERT [V]
- $\phi_{MN} \equiv$ Diferencia de potencial eléctrico entre los puntos M y N [V]
- $K_{Wenner} \equiv$ Factor geométrico para la distribución tipo Wenner de los electrodos del método ERT [*adimensional*]
- $d_i \equiv$ Vector de datos medidos en el problema de inversión
- $m_j \equiv$ Vector de parámetros del modelo en el problema de inversión
- $f_i \equiv$ Modelo matemático en el problema de inversión
- $r_i \equiv$ Vector de residuos en el problema de inversión
- $G_{ij} \equiv$ Matriz de coeficientes del modelo matemático en el problema de inversión
- $\lambda \equiv$ Parámetro de balanceo en el problema de inversión
- $\mathcal{W} \equiv$ Matriz de diferencias finitas que aproxima la segunda derivada del modelo a lo largo de una determinada dirección por una expresión de primer orden
- $m_0 \equiv$ Modelo de referencia en el problema de inversión
- $\omega \equiv$ Número de onda [m^{-1}]
- $\bar{\phi}(x, \omega, z) \equiv$ Campo de potencial eléctrico en el dominio de Fourier
- $\nabla \equiv$ Operador nabla
- $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv$ Función delta de Dirac [m^{-3}]

- $(x_0, y_0, z_0) \equiv$ Posición de la fuente de intensidad de corriente eléctrica en 3D [m]
- $\mathcal{K}_0 \equiv$ Función de Bessel modificada del segundo tipo de orden 0
- $(I, J) \equiv$ Índices de los bloques en los que se discretiza la parte de la matriz del dominio
- $N_x \equiv$ Número de bloques en los que se discretiza la matriz del dominio en la dirección x
- $N_y \equiv$ Número de bloques en los que se discretiza la matriz del dominio en la dirección y
- $N_z \equiv$ Número de bloques en los que se discretiza la matriz del dominio en la dirección z
- $k \equiv$ Índice de numeración de los segmentos de las fracturas presentes en el dominio
- $i_k, j_k \equiv$ Nodos que delimitan el segmento de fractura k
- $b_f^k \equiv$ Apertura del segmento de fractura k [m]
- $\sigma_f^k \equiv$ Conductividad eléctrica del segmento de fractura k [Sm^{-1}]
- $x_k \equiv$ Variable que describe la longitud del segmento de fractura k [m]
- $\bar{\phi}_f^k(x_k, \omega) \equiv$ Potencial eléctrico a lo largo del segmento de fractura k en el dominio de Fourier
- $\varphi_f^{i_k}, \varphi_f^{j_k} \equiv$ Potencial eléctrico de la fractura en los nodos i_k y j_k respectivamente en el dominio de Fourier.
- $\sigma_m^{IJ} \equiv$ Conductividad eléctrica de la matriz en la celda (I, J) [Sm^{-1}]
- $V_{IJ} \equiv$ Volumen de control correspondiente a cada celda de discretización de la matriz
- $L_k \equiv$ Longitud del segmento de fractura k [m]
- $\alpha_{fm}^{IJ} \equiv$ Coeficiente de intercambio de flujo de corriente eléctrica entre matriz y fractura.
- $\bar{Q}_{fm} \equiv$ fuente/sumidero de corriente eléctrica en el dominio de Fourier
- $N_i \equiv$ Número de segmentos de fracturas que intersectan en el punto i
- $\Delta x \equiv$ Dimensión de las celdas de discretización de la matriz del dominio en la dirección x
- $\Delta z \equiv$ Dimensión de las celdas de discretización de la matriz del dominio en la dirección z
- $D_T^f \equiv$ Coeficiente de difusión de masa en dirección transversal de la fractura [m^2/s]
- $D_L^f \equiv$ Coeficiente de difusión de masa en dirección longitudinal de la fractura [m^2/s]
- $D_T^m \equiv$ Coeficiente de difusión de masa en dirección transversal de la matriz [m^2/s]
- $D_L^m \equiv$ Coeficiente de difusión de masa en dirección longitudinal de la matriz [m^2/s]
- $N \equiv$ Número de números de onda utilizados en la inversión de Fourier

- $T \equiv$ Dominio de inversión de la solución en el dominio de Fourier
- $g \equiv$ Peso de Fourier optimizado para la inversión de Fourier
- $\sigma_{sup} \equiv$ Conductividad eléctrica de la capa superior en un dominio formado por dos capas horizontales con diferente conductividad [Sm^{-1}]
- $\sigma_{inf} \equiv$ Conductividad eléctrica de la capa inferior en un dominio formado por dos capas horizontales con diferente conductividad [Sm^{-1}]
- $e \equiv$ Espesor de las capas en un dominio formado por dos capas horizontales con diferente conductividad [%]
- $\varepsilon_{rel} \equiv$ Error relativo con respecto al valor esperado en la resistividad eléctrica de un dominio homogéneo
- $\mathcal{K}_1 \equiv$ Función de Bessel modificada del segundo tipo de orden 1

Resumen y Estructura del Contenido

Este trabajo está planteado de una forma muy descriptiva e instructiva, de forma que puede llegar a ser difícil mantener en mente la estructura del contenido en todo momento. Es por ello que se establecerá un pequeño resumen que permita estructurar la lectura, permitiendo de esta forma al lector recurrir a este apartado en caso de querer ordenar o localizar una determinada sección.

Obviando la motivación del problema descrita en la sección 1, que presenta una estructura muy simple y no será objeto de esta estructuración, en primer lugar se realizará una pequeña introducción al problema planteado, haciendo referencia a las bases sobre las que se apoya el trabajo: conceptos básicos de comprensión del método de medición utilizado en los experimentos de campo (método ERT), la aproximación dimensional en la que se basa gran parte del proyecto (2.5D) y las teorías de modelado de la corriente eléctrica existentes en la bibliografía (EPM,DP,DFN,DDP,...) (sección 2).

Posteriormente a la presentación de las bases del trabajo, se pasará al desarrollo de dichas hipótesis aplicadas sobre el dominio de estudio, en el que existirán fracturas que modificarán las ecuaciones que rigen el problema en un dominio homogéneo. Esta presentación de las ecuaciones necesarias para la solución del problema se plantea en tres estadios diferentes: (a) las ecuaciones que afectan a la red de fracturas, (b) las que afectan a la matriz y (c) las que afectan a la comunicación entre ambas partes del dominio (sección 3). A lo largo de esta sección se definirá un modelo resultado de la aplicación de las dos hipótesis principales en las que se apoya el proyecto, descritas perfectamente en la introducción del trabajo, como son el concepto de 2.5D y la teoría DDP.

Como modo de verificación del modelo planteado con anterioridad, se plantearán una serie de ensayos en los que se intentará comprobar si cada uno de los pasos llevados a cabo en la sección 3 representan fielmente la realidad del problema. Este análisis del modelo se llevará a cabo, al igual que ocurre con el resto del trabajo, muy escalonadamente, de forma que sea posible detectar cualquier error en la aplicación de las suposiciones explicadas anteriormente (sección 4). Para cerrar dicha sección, se procederá a presentar los resultados del modelo comparados con los ofrecidos por programas de cálculo numérico, con la intención de demostrar la veracidad del modelo descrito.

Por último y a modo de cierre, se llevará a cabo la descripción de cada una de las conclusiones que se podrían extraer de la presentación de los resultados que ofrecería el modelo propuesto, desde un punto de vista crítico y objetivo, ofreciendo soluciones para los errores que aparecen en su planteamiento, entre los que se encuentran (a) la cuestión de las condiciones de contorno y su relación con el tamaño del dominio de estudio, que se trata durante la presentación de los resultados, (b) los problemas que puede acarrear la transformación de Fourier empleada para el caso de la teoría DDP, (c) las diferentes opciones de discretización del modelo alternativas a aquella planteada durante el desarrollo del problema y (d) la posible extensión del método de la eliminación de la singularidad para el modelo DDP, puesto que el aquí presentado sólo es válido para el caso EPM (sección 5).

Se ha añadido además un apartado en el que se plantean los posibles ámbitos de mejora dentro de este trabajo que podrían servir como puntos de partida en la ampliación de la teoría aquí presentada (sección 6).

Estructurado a grandes rasgos el trabajo que se va a presentar, se procederá al desarrollo del mismo.

Índice

Agradecimientos	I
Glosario	III
Resumen y Estructura del Contenido	VI
Lista de figuras	IX
Lista de tablas	XII
1. Motivación	1
2. Introducción	3
2.1. Método ERT	3
2.1.1. Conceptos básicos	3
2.1.2. Campo eléctrico y Configuración de los electrodos	4
2.1.3. Inversión	7
2.2. Aproximación 2.5D	9
2.3. Teorías de Modelado Numérico del Flujo de Corriente Eléctrica	10
2.3.1. Teoría <i>Equivalent Porous Media</i> (EPM)	10
2.3.2. Teorías <i>Dual Porosity</i> (DP) y <i>Discrete Fracture Network</i> (DFN)	12
3. Metodología	15
3.1. Planteamiento General del Problema	15
3.2. Formulación del Problema	16
3.3. Estrategia de Modelado del Problema	18
3.4. Nomenclatura y Discretización del Modelo	19
3.5. Expresión Analítica para el Potencial Eléctrico a lo largo de un Segmento de Fractura	20
3.6. Modelo DFN Modificado para la Red de Fracturas	22
3.7. Modelo de Volúmenes Finitos Modificado en la Escala de la Matriz	23
3.8. Coeficiente de intercambio entre matriz y fractura (α_{fm}^{IJ})	26
3.9. Transformación Inversa de Fourier	28
4. Validación del Modelo y Resultados	35
4.1. Validación del Modelo	35
4.1.1. Inyección de Corriente Eléctrica en un Dominio Homogéneo	36
4.1.2. Inyección de Corriente Eléctrica en un Dominio Heterogéneo	39
4.1.3. Caso Gradiente	44

4.2. Resultados	48
4.2.1. Resultados <i>Equivalent Porous Media</i> (EPM)	49
4.2.2. Resultados <i>Discrete-Dual Porosity</i> (DDP)	54
4.2.3. Resultados del Problema de Inversión	62
5. Conclusiones	66
6. Trabajo Futuro	69
A. Apéndice A: Solución Homogénea 2.5D y Posición de la Fuente de Corriente	74
A.1. Solución 2.5D Homogénea	74
A.2. Posición de la Fuente de Corriente	75
B. Apéndice B: Eliminación de la Singularidad	77
C. Apéndice C: Condiciones de Contorno	80
D. Apéndice D: Códigos	84

Índice de figuras

2.1.1.Experimento ERT con 4 electrodos en superficie (Telford et al. [1990])	4
2.1.2.Campo de potencial eléctrico generado por un punto de inyección en la superficie del terreno (Telford et al. [1990])	5
2.1.3.Configuración Wenner de electrodos (electrodos de potencial interiores y electrodos de intensidad exteriores)(Telford et al. [1990])	6
2.2.1.(a) Ejes coordenados 3D y (b) ejes resultantes de aplicar la transformación de Fourier- coseno	9
3.1.1.Superposición de problemas de una única inyección(con posiciones de fuente según Figura (2.1.3) . . .	15
3.3.1.Discretización del modelo DDP propuesto. La matriz se divide en bloques regulares (cuadrados azules), identificados por los índices (I,J) , donde las fracturas son representadas por elementos 1-D que se subdividen en segmentos (líneas negras), los cuales están delimitados por nodos (círculos numerados). Los nodos pueden ser intersecciones entre el límite de un bloque y una fracturas (puntos negros), intersecciones entre fracturas (punto verde) o extremos de fractura (puntos rojos)	18
3.4.1.Zoom del bloque (2,2) de la matriz de la Figura 3.3, mostrando únicamente el segmento de fractura que une los nodos 8 y 9. Los nodos que delimitan el segmento k^{esimo} están localizados en $x_k = 0$ y $x_k = L_k$, donde L_k es la longitud del segmento en cuestión y x_k denota la variable espacial 1-D a lo largo del mismo. La conductividad eléctrica del segmento viene dada por σ_f^k , la apertura de la fractura por b_f^k y el potencial eléctrico por $\bar{\phi}_f^k = \bar{\phi}_f^k(x_k)$. Los valores φ_f^{ik} y φ_f^{jk} están referidos al valor del potencial eléctrico en $x_k = 0$ y $x_k = L_k$ respectivamente. En la escala de la matriz, σ_m^{IJ} , $\bar{\phi}_m^{IJ}$ y α_{fm}^{IJ} sirven para definir la conductividad eléctrica del bloque, el potencial eléctrico del bloque y el coeficiente de intercambio del bloque respectivamente.	19
3.6.1.Zoom del bloque (1,2) de la matriz de la Figura (3.3) que muestra la intersección localizada en el nodo 3. Esta intersección es compartida por los segmentos $k = 1, 2, 3$ y 4 , caracterizados por su segundo nodo $j_k = 2, 4, 7$ y 8 . Cada segmento posee su propia apertura (b_f^k), conductividad eléctrica (σ_f^k) y potencial eléctrico ($\bar{\phi}_f^k = \bar{\phi}_f^k(x_k)$).	22
3.8.1.Representación esquemática del sistema matriz-fractura ([Roubinet et al., 2012])	27
3.8.2.Distance $< d >$ desde un punto cualquiera de una celda a una fractura contenida en dicha celda [Li et al., 2008].	28
3.9.1.Ejes real (a) y de Fourier (b) utilizados en la aplicación de la transformación discreta inversa de Fourier-coseno	29
3.9.2.Matriz 3D (cubo rojo) compuesta por planos 2D en el dominio de Fourier (planos $x - z$ azules)	30
4.1.1.Potencial eléctrico homogéneo 3D: solución analítica 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (línea continua azul); solución numérica C++ 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (asteriscos rojos)	37
4.1.2.Potencial eléctrico homogéneo 3D: solución analítica 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (línea continua azul); solución numérica C++ 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (asteriscos rojos); solución analítica 3D (círculos negros)	38
4.1.3.Geometría del dominio heterogéneo utilizado en la sección 4.1.2	39
4.1.4.Método de las imágenes utilizado para obtener el valor del potencial eléctrico en un punto (P) de la superficie (Telford et al. [1990]).	40

4.1.5. Potencial eléctrico heterogéneo 3D: solución analítica 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (línea continua azul); solución numérica C++ 2.5D estándar tras aplicar la transformación inversa de Fourier (cuadrados verdes); solución numérica C++ 2.5D con eliminación de la singularidad tras aplicar la transformación inversa de Fourier (asteriscos rojos)	42
4.1.6. Potencial eléctrico heterogéneo 3D: solución analítica 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (línea continua azul); solución numérica C++ 2.5D estándar tras aplicar la transformación inversa de Fourier (cuadrados verdes); solución numérica C++ 2.5D con eliminación de la singularidad tras aplicar la transformación inversa de Fourier (asteriscos rojos); solución analítica 3D (círculos negros)	43
4.1.7. Geometría del caso gradiente planteado en la sección 4.1.3 para la validación del modelo DDP: (a) Situación 2D; (b) situación 2.5D	44
4.1.8. Potencial 2.5D para distintos números de onda: solución analítica 2.5D para el caso gradiente (Ecuación (4.6)) (Línea continua azul); solución C++ para el potencial eléctrico de la fractura (cuadrado negros); solución C++ para el potencial eléctrico de la matriz (asteriscos rojos)	46
4.2.1. Situación analizada para el cálculo de la resistividad aparente de las diferentes situaciones presentadas en la sección 4.2	49
4.2.2. Resistividad aparente para diferentes separaciones de la matriz de electrodos en un dominio homogéneo con conductividad eléctrica $\sigma = 1 \cdot 10^{-3} \text{ (Sm}^{-1}\text{)}$	50
4.2.3. Error cometido en el cálculo de la resistividad aparente en el dominio homogéneo con respecto al valor esperado, calculado según la Ecuación (4.7)	51
4.2.4. Resistividad aparente para un dominio heterogéneo formado por dos capas horizontales, con un espesor de la capa superior de $e_{sup} = 1,5 \text{ m}$ y unas conductividades eléctricas de valor $\sigma_{sup} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Sm}^{-1}$ y $\sigma_{inf} = 1 \cdot 10^{-1} \text{ Sm}^{-1}$	53
4.2.5. Geometrías utilizadas en la presentación de resultados: (a) caso de fracturas paralelas, (b) caso de “Sugar Box”, (c) Caso de fracturas aleatorias	55
4.2.6. Caso de fracturas paralelas. Se utilizan 5 fracturas paralelas a la superficie del dominio y equidistantes entre sí. (a) distribución vertical de resistividad aparente y (b) error relativo cometido con respecto al valor esperado de resistividad aparente en el dominio homogéneo	56
4.2.7. Caso de “Sugar Box”. Se utilizan 5 fracturas paralelas a la superficie del dominio equidistantes entre sí que cortan a otras 5 fracturas perpendiculares a la superficie y equidistantes entre sí. (a) distribución vertical de resistividad aparente y (b) error relativo cometido con respecto al valor esperado de resistividad aparente en el dominio homogéneo	57
4.2.8. Caso de fracturas aleatorias. Se utiliza una distribución aleatoria de fracturas (aunque siempre la misma, por mantener la coherencia del problema). (a) distribución vertical de resistividad aparente y (b) error relativo cometido con respecto al valor esperado de resistividad aparente en el dominio homogéneo . . .	57
4.2.9. Caso de fracturas paralelas. En ambas situaciones $\sigma_f = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Sm}^{-1}$, teniendo siempre en cuenta que $\sigma_f/\sigma_m \gg 1$. (a) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Sm}^{-1}$; (b) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-8} \text{ Sm}^{-1}$	59

4.2.10	Caso de “Sugar Box”. En ambas situaciones $\sigma_f = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Sm}^{-1}$, teniendo siempre en cuenta que $\sigma_f/\sigma_m \gg 1$. (a) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Sm}^{-1}$; (b) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-8} \text{ Sm}^{-1}$	60
4.2.11	Caso de fracturas aleatorias. En ambas situaciones $\sigma_f = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Sm}^{-1}$, teniendo siempre en cuenta que $\sigma_f/\sigma_m \gg 1$. (a) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Sm}^{-1}$; (b) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-8} \text{ Sm}^{-1}$	61
4.2.12	Distribución de las medidas de resistividad aparente tomadas en la realización de los experimentos ERT de la forma explicada en la sección 4.2.3 (Software Res2DInv®)	63
4.2.13	Distribución real de resistividad del subsuelo obtenida mediante la inversión de los datos medidos anteriormente. En la parte superior, se muestra la “pseudo-sección” de resistividad aparente medida de la forma explicada con anterioridad; en la parte central, aparece la “pseudo-sección” resultante de las iteraciones necesarias en el proceso de inversión, aquella que sirve como valor de entrada en la última iteración; en la parte inferior, se muestra la distribución de resistividad real del subsuelo que mejor se ajusta al modelo inicial (Software Res2DInv®)	64
C.0.1	Discretización empleada para las fronteras izquierda (a), derecha (b) e inferior (c) del dominio	82

Índice de tablas

4.1.1. <i>Parámetros para el cálculo de las soluciones presentadas en la sección 4.1</i>	39
4.1.2. <i>Parámetros para el cálculo de las soluciones presentadas en la sección 4.1.3</i>	47
4.2.1. <i>Parámetros para el cálculo de las soluciones presentadas en la sección 4.2.1</i>	54
4.2.2. <i>Parámetros para el cálculo de las soluciones presentadas en la sección 4.2.1. Aunque hay tres geometrías diferentes, los parámetros que aparecen en esta tabla se utilizarán por igual para cada una de dichas geometrías</i>	62

1. Motivación

La caracterización de fracturas y de sus propiedades en medios rocosos es de gran importancia en una amplia variedad de campos de investigación, entre los que podríamos incluir: hidrología, energía geotérmica, extracción de hidrocarburos o almacenamiento a largo plazo de residuos tóxicos (secuestro de CO₂, almacenamiento de residuos nucleares...)(e.g. *Bogdanov et al.* [2003], *Gautam and Mohanty* [2004], *Perera et al.* [2012], *Rotter et al.* [2011], *Sarda et al.* [2002]).

Para la extracción de hidrocarburos, la presencia de fracturas es una clara ventaja, puesto que éstas permitirían un rápido y fácil acceso al recurso en cuestión y por ende, una mejor extracción. En cuanto al almacenamiento de residuos tóxicos y regiones contaminadas, ocurre lo contrario. Las fracturas en el subsuelo representan un problema, puesto que, en caso de fuga, incrementan notablemente el riesgo de transporte indeseado de contaminantes hacia el subsuelo. En todos los casos, la identificación de fracturas y redes de ellas así como de sus características es un tema decisivo y muy importante que puede ser imprescindible para futuras predicciones en el ámbito del flujo y transporte de materiales en el subsuelo, así como para el desarrollo de técnicas apropiadas para la toma de decisiones posteriores en el ámbito medioambiental.

Los medios rocosos con presencia de fracturas se caracterizan por un elevado contraste en el valor de la permeabilidad eléctrica entre las propias fracturas y la matriz rocosa que las rodea, donde las fracturas (más permeables) ocupan un volumen extremadamente inferior al de la matriz rocosa que las contiene (con menor permeabilidad). Esto ocasiona que la fluencia de la corriente eléctrica en el subsuelo se produzca mayoritariamente a lo largo de las redes de fracturas existentes, que permiten un paso más sencillo de la corriente eléctrica a través de ellas. Sin embargo, en situaciones en las que la diferencia de permeabilidades no sea tan elevada, es importante tener en cuenta que existe un porcentaje de corriente eléctrica considerable que pasa de matriz a fractura y viceversa. En este estudio se valorará esta última posibilidad, en la que la corriente eléctrica puede circular a través de cualquiera de las estructuras existentes en el subsuelo.

Dada la elevada importancia de la identificación y caracterización de fracturas, existen diversos estudios en los que, basándose en diferentes métodos, se reúne información acerca de las fracturas presentes en el subsuelo y sus características (e.g. *Bear et al.* [2012], *Sahimi* [2011]). Estos métodos se pueden dividir en aquellos más tradicionales, que se basan en la observación directa de las fracturas y/o de muestras obtenidas experimentalmente en una serie de afloramientos en superficie o pozos realizados en el dominio de estudio, y en métodos denominados geofísicos, que permiten, de una forma no invasiva, el estudio de la distribución de las fracturas y de algunas de sus propiedades importantes, permitiendo obtener información de las estructuras del subsuelo a diferentes profundidades.

Debido principalmente a cuestiones logísticas y económicas, la realización de pozos no es siempre posible, por lo que, aunque los métodos geofísicos aportan una información sujeta a grandes incertidumbres (principalmente las que se presentan al intentar ajustar los datos medidos a un modelo establecido), han sido utilizados en diversos estudios anteriores en el ámbito de medios con presencia de fracturas (e.g. *Coscia et al.* [2012], *Dorn et al.* [2012], *Lewkowicz et al.* [2011], *Loke et al.* [2013], *Nagata et al.* [2008], *Okay et al.* [2013], *Patriarca et al.* [2011], *Robert et al.* [2011], *Robinson et al.* [2015], *Sassen and Everett* [2009], *Xiao et al.* [2014]). Entre estos métodos podemos incluir: *seismic, ground-*

penetrating radar (GPR), electrical resistivity, induced polarization, self potential (SP) o electromagnetic methods.

Dada su accesibilidad a nivel académico, en el presente trabajo se utilizarán métodos geofísicos para caracterizar las fracturas existentes en el subsuelo, lo que permitirá en un futuro implementar el método propuesto a continuación en datos y escenarios reales. En concreto, se considerará el método de “*Electrical Resistivity Tomography*” (ERT a partir de ahora), que permite una caracterización de las fracturas y demás estructuras a través de sus propiedades eléctricas, en especial, de su conductividad y su resistividad eléctricas.

En particular, este proyecto se centrará en el modelado numérico del flujo de corriente eléctrica en medios rocosos con fracturas, algo que ha estado muy limitado computacionalmente en estudios anteriores a dominios pequeños y redes de fracturas muy simples o poco realistas. Aquí se presentará un nuevo algoritmo de modelado, combinación de dos teorías de transporte de fluidos en medios con fracturas (*Dual-Porosity*, (*DP*) y *Discrete Fracture Network*, (*DFN*)) y una simplificación en el campo de conductividades eléctricas (algoritmo 2.5D), con el que se pretende sentar las bases para un futuro estudio en mayor profundidad de las considerables ventajas que puede ofrecer este método a la caracterización e identificación de fracturas en el subsuelo.

2. Introducción

2.1. Método ERT

2.1.1. Conceptos básicos

Electrical Resistivity Tomography (ERT) es un método geofísico que permite conocer la distribución de resistividad eléctrica del subsuelo en un área determinada [Telford et al., 1990].

La resistividad eléctrica es una propiedad intrínseca del material, inversa de la conductividad eléctrica, que puede dar información sobre otras propiedades del subsuelo, como podrían ser: la localización de las fracturas, acuíferos o pozos de hidrocarburos, los caminos preferentes de paso de fluidos en el subsuelo para, por ejemplo, facilitar la posible extracción de hidrocarburos, etcétera.

El valor de la resistividad eléctrica del subsuelo depende en gran medida de varios factores, entre los que podemos destacar:

- Humedad y Temperatura: La resistividad se ve claramente disminuida para valores más elevados tanto de temperatura como de humedad, que facilitarían una mejor conducción de la corriente eléctrica. La relación entre estas tres variables viene dada por la “Ecuación de Albrecht”:

$$\rho = \frac{1,3 \cdot 10^4}{(1 + 0,73H^2)(1 + 0,03\theta)} \quad (2.1)$$

Donde ρ es la resistividad del terreno (Ωm), H la humedad del suelo (% en peso) y θ su temperatura ($^{\circ}C$). Esta expresión sólo se suele utilizar para comprobar la influencia de dichos factores sobre el valor de la resistividad, no para calcular su valor directamente.

En consecuencia, cabe esperar que la resistividad varíe en función de la época del año en que se realicen las mediciones, en particular en la zona cercana a la superficie. De esta forma, un método para eliminar esta dependencia en cierto modo es el enterramiento de los electrodos, donde las condiciones de humedad y temperatura son algo más estables en las distintas estaciones anuales.

- Compactación del suelo: Una mayor compactación del suelo provoca un mayor acercamiento entre las partículas, favoreciendo la conducción eléctrica entre ellas, de modo que la resistividad disminuye. Esta relación entre compactación y conducción no aplica cuando estamos ante un medio saturado (en general, de agua debida a la humedad), en el que la gran mayoría de las partículas están embebidas en agua, puesto que prima el poder conductivo de la misma y la distancia entre partículas no es tan importante.
- Composición del suelo y Sales solubles: La composición del terreno depende de la naturaleza del mismo (arcilla, silicato, granito...), que implica diferentes valores de resistividad.

La cantidad de sales disueltas afecta a la resistividad disminuyéndola notablemente al aumentar el contenido de las mismas.

Estos dos factores provocan que la resistividad varíe en las distintas capas que se forman en el subsuelo a diferentes profundidades.

De esta forma, el objetivo de este método será calcular la resistividad eléctrica de pequeñas parcelas de terreno en las que se dividirá el dominio de interés, donde se dispondrán dos electrodos de intensidad (a través de los cuales se inyecta y recoge respectivamente en la superficie una intensidad de corriente conocida) y dos electrodos de voltaje (donde se mide la diferencia de potencial generada entre ambos a raíz del paso de la intensidad de corriente entre los electrodos de intensidad) (Figura 2.1.1).

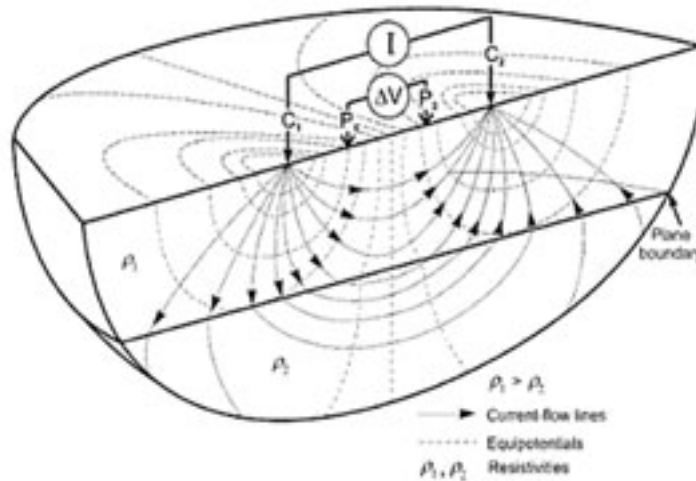


Figura 2.1.1: *Experimento ERT con 4 electrodos en superficie (Telford et al. [1990])*

Mediante este dispositivo colocado en la superficie de un determinado escenario, se puede obtener un único dato de diferencia de potencial. El proceso se repite un número determinado de veces, desplazando longitudinalmente el dispositivo formado por los 4 electrodos (a partir de ahora, denominado “matriz de electrodos”), para generar un conjunto de datos de diferencia de potencial que describirán eléctricamente una línea del dominio de estudio. Este conjunto de datos permite calcular, a lo largo de dicha línea, la distribución de resistividad aparente, concepto que será definido más adelante.

Este valor de resistividad aparente no tiene porqué corresponderse con el de los valores reales de resistividad del subsuelo, sino que es función de las características de éste, así como de la distribución de electrodos utilizada.

Para calcular dicha distribución de resistividad aparente, es necesario en primer lugar introducir algunos conceptos referentes al campo eléctrico y a la configuración de los electrodos.

2.1.2. Campo eléctrico y Configuración de los electrodos

Considerando un terreno homogéneo, el campo eléctrico generado por una inyección de corriente en un punto determinado de la superficie del dominio de estudio, suponiendo que el potencial eléctrico es nulo en puntos muy alejadas de la fuente, viene descrito en Telford et al. [1990] en coordenadas esféricas:

$$\phi(r) = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{r} \quad (2.2)$$

Donde $\phi(r)$ es el campo de potencial eléctrico (V, V: Voltios), I la intensidad de corriente eléctrica inyectada (A, A: Amperios), σ la conductividad eléctrica del terreno (S , S : Siemens) y r es la coordenada radial con origen en el punto de inyección (m).

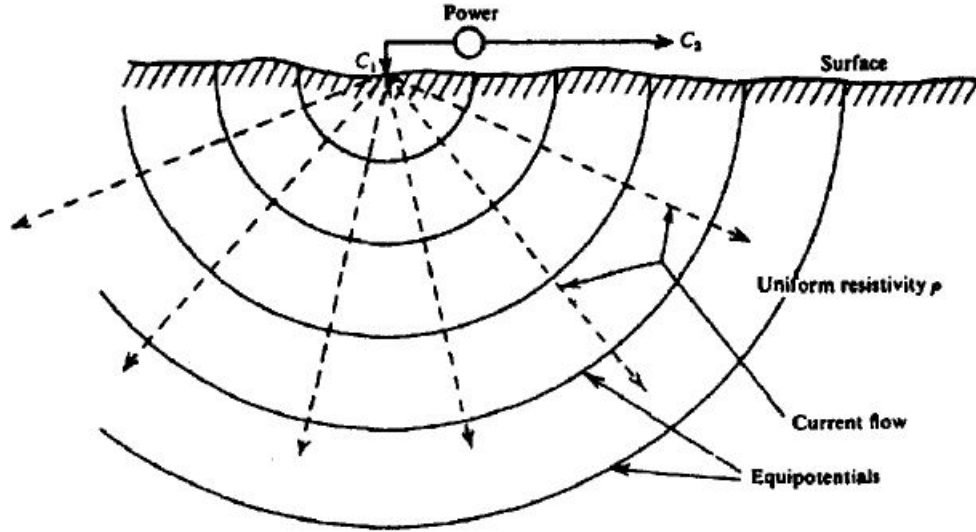


Figura 2.1.2: Campo de potencial eléctrico generado por un punto de inyección en la superficie del terreno (Telford et al. [1990])

Como se observa en la Figura 2.1.2, el campo de potencial eléctrico generado bajo estas condiciones está formado por superficies equipotenciales hemi-esféricas, propagándose la corriente eléctrica hacia mayores profundidades en el subsuelo y sin producirse propagación de ésta hacia puntos por encima de la superficie, puesto que se considera que la conductividad del aire es $\sigma_{aire} \approx 0$.

La resistividad aparente, referenciada en la sección anterior, se puede definir como aquella resistividad correspondiente a un terreno homogéneo en el cual, para una disposición dada de los electrodos e igual magnitud de corriente inyectada al medio, se produce una misma diferencia de potencial medida en un terreno no homogéneo. Por ello, a partir de la Ecuación 2.2 se podría calcular el valor de resistividad del terreno homogéneo, conocidos el campo de potencial eléctrico (ϕ) y la corriente eléctrica (I). Este valor de resistividad para un terreno homogéneo se corresponde, según la definición anterior, con el de la resistividad aparente para un terreno no homogéneo, y se calculará de la siguiente forma:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2\pi r \phi}{I} \quad (2.3)$$

Sin embargo, se ha explicado anteriormente que el dispositivo utilizado para medir la diferencia de potencial estaba formado por un total de cuatro electrodos, dos de intensidad y otros dos de potencial. Por ello, se debe determinar el valor de la resistividad eléctrica para este supuesto, descrito igualmente en Telford et al. [1990].

Considerando esta vez dos electrodos de cada tipo dispuestos sobre la superficie de un terreno homogéneo, se deberá tener en cuenta que el campo de potencial eléctrico en cualquier punto por debajo de la superficie se verá afectado por ambos electrodos de intensidad, uno de los cuales inyecta un valor establecido de intensidad de corriente y el otro, recoge el mismo valor. Por ello, el valor de potencial eléctrico calculado sobre cada uno de los electrodos de potencial se puede calcular aplicando el Principio de Superposición a la Ecuación 2.2:

$$\phi_M = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{MB} \right) \quad (2.4)$$

$$\phi_N = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{1}{AN} - \frac{1}{NB} \right)$$

Donde A y B son los electrodos de intensidad, y M y N son los de potencial. Por tanto, AM, AN, MB, NB serán las distancias entre dichos electrodos, como se puede apreciar en la Figura 2.1.3.

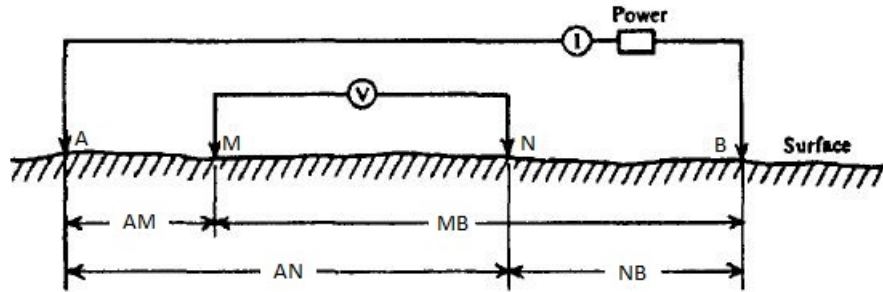


Figura 2.1.3: Configuración Wenner de electrodos (electrodos de potencial interiores y electrodos de intensidad exteriores) (Telford et al. [1990])

Por lo tanto, la diferencia de potencial entre M y N vendrá dada por la expresión:

$$\phi_{MN} = \frac{I}{2\pi\rho} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{NB} \right) \quad (2.5)$$

Entonces, se puede inferir que la resistividad del terreno homogéneo puede expresarse como:

$$\rho = \frac{\phi_{MN}}{I} K_{Wenner} \quad (2.6)$$

Donde $K_{Wenner} = 2\pi \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{MB} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{NB} \right)^{-1}$ se denomina factor geométrico, y es un término que únicamente depende de la distribución de los electrodos utilizada. En este caso, se utilizará la distribución de Wenner, presentada en la Figura 2.1.3.

Existen muchas otras distribuciones de electrodos, entre las que podemos señalar Wenner-Schlumberger, “dipole-dipole” o “pole-pole”, que se diferencian por sus valores de ratio señal/ruido, resolución vertical (capacidad para diferenciar estructuras horizontales), resolución horizontal (capacidad para diferenciar estructuras verticales) y número de electrodos utilizados en las mediciones. Estas diferencias se ven plasmadas en el factor geométrico, que afecta directamente al cálculo de la resistividad del terreno, como hemos visto en la Ecuación (2.6).

De esta forma es posible conseguir la distribución de resistividad aparente de un terreno no homogéneo, que vendrá igualmente determinada por la Ecuación (2.6), donde se conocen la intensidad de corriente introducida en el subsuelo y la diferencia de potencial medida para cada experimento.

2.1.3. Inversión

En geofísica, así como en otras disciplinas científicas (imagen médica, sensores remotos, tomografía acústica oceánica, test no destructivos, astronomía, ...), el concepto de inversión es clave, puesto que aparece en todos aquellos métodos en los que se utilizan mediciones de campo para inferir propiedades del subsuelo (e.g. *Belina et al.* [2012], *Rosas-Carbaljal et al.* [2013], *Gallardo et al.* [2012], *Ruggeri et al.* [2015], *Sen and Stoffa* [2013]). El problema que entrañan todos estos métodos es el de, una vez recolectados todos los datos necesarios, intentar buscar un modelo matemático/físico que se ajuste a los datos que se han recogido y que represente la distribución de alguna propiedad del subsuelo que se desee determinar.

$$d_i = f_i(m_j) + r_i \quad (2.7)$$

Se podría expresar esta idea a través de la Ecuación (2.7), donde d_i es el vector de datos medidos, m_j el vector de parámetros del modelo, que determina la distribución espacial de una propiedad física concreta, f_i el modelo matemático que, aplicado a m_i , lo ajustaría a los datos medidos, y r_i el vector de residuos que afecta a los datos medidos.

En este caso particular, los datos introducidos serán las medidas de resistividad aparente, y la propiedad que se desea determinar en base a un modelo matemático/físico será la resistividad eléctrica real del subsuelo. A este problema se le denomina *Problema Inverso*, e implica una de las mayores dificultades en geofísica a la hora de determinar las propiedades del subsuelo, puesto que no existe solución única para dicho problema, sino infinitad de opciones que dan solución a los datos medidos. Esto quiere decir que, para una única distribución de resistividad aparente, existen infinitas distribuciones de resistividad eléctrica real que se ajustan en mayor o menor medida a los datos tomados.

No se entrará en detalle en el problema de inversión, puesto que no es el objetivo de esta trabajo, pero puede ser interesante dar un idea general de cómo podría plantearse un problema de este tipo de una manera sencilla.

Cabe destacar que para llevar a cabo la explicación de esta sección se va a considerar el problema de inversión lineal, en el que cada uno de los datos recogidos en la toma de medidas puede ser expresado como una combinación lineal de los parámetros del modelo.

$$d_i = \sum_j G_{ij} m_j + r_i \quad (2.8)$$

Donde G_{ij}^T es la matriz de coeficientes del modelo matemático definido por m_j que dan como resultado la combinación lineal de la que se ha hablado.

Esta consideración se debe a que el objetivo de este trabajo no es el de invertir los datos generados sintéticamente, sino únicamente obtener la distribución de resistividad aparente, lo que depende exclusivamente del modelo aplicado al problema para calcular los datos, y de ninguna manera es función del método de inversión aplicado.

Puede deducirse que linealizar el problema de inversión no es la manera más adecuada de resolver un problema de este tipo, puesto que es muy difícil ajustar los datos a un modelo lineal. Sin embargo, es un método ampliamente utilizado en geofísica, principalmente para problemas gravitatorios o de resistividad (e.g. *Ambikasaran et al.* [2013], *Bear et al.* [1995], *Fernandez Martinez et al.* [2012], *Saibaba and Kitanidis* [2012]). En concreto, esta será la razón por la cual se basará la pequeña explicación del problema inverso en la inversión lineal, adicionalmente al hecho de que no es objeto de estudio del trabajo presentado y por lo tanto no se complicará el problema más de lo necesario.

Una forma relativamente simple de resolver el problema de inversión, sería aplicar el método de mínimos cuadrados, que permite buscar el vector m_j que minimiza el residuo, en concreto la norma L-2 del residuo ($\|r\|^2 = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2$). Esto podría expresarse matemáticamente como:

$$m_i = (G_{ij}^T G_{ij})^{-1} G_{ij}^T d_i \quad (2.9)$$

Este modelo plantea problemas de aplicación cuando la matriz $G_{ij}^T G_{ij}$ no es invertible (incluso siendo siempre cuadrada), lo que ocurre muy comúnmente en geofísica, principalmente debido a la existencia de una gran cantidad de datos, que puede hacer que éstos sean linealmente dependientes unos de otros y generen infinitas soluciones, o justo el caso contrario, no tener suficientes datos que permitan limitar el número de soluciones. Por ello, es conveniente incluir algunas consideraciones al método de mínimos cuadrados que permitan limitar a una la solución del problema. Entre estas consideraciones añadidas se encuentran típicamente:

- El modelo más pequeño posible: En este caso, se considera que, de entre todas las posibles soluciones al problema de inversión, se va a buscar aquella que tiene el menor tamaño. Igual que anteriormente, se considerará la norma L-2 para establecer el tamaño del modelo. De esta forma, ahora se intentará minimizar $\|r\|^2 + \lambda \|m\|^2$, donde λ cumple la función de balancear la prioridad entre buscar un modelo que disminuya el residuo y ajustar dicho modelo al de menor tamaño posible.
- Suavizar el modelo: Aquí se minimizará $\|\mathcal{W}m\|^2$, donde \mathcal{W} es una matriz de diferencias finitas que aproxima la segunda derivada del modelo a lo largo de una determinada dirección por una expresión de primer orden.
- El modelo más pequeño posible con respecto a un modelo de referencia: De este modo, se minimizará $\|r\|^2 + \lambda \|m - m_0\|^2$, donde m_0 es el modelo de referencia, que en la práctica suele ser un valor constante.

Generalmente, los dos últimos casos suelen ser considerados simultáneamente, con objeto de mejorar aún más la simplificación del número de soluciones del problema de inversión y conseguir una expresión general que pueda utilizarse para un gran número de problemas de inversión lineal de cualquier tipo:

$$m_j = (G_{ij}^T G_{ij} + C_{ij})^{-1} (G_{ij}^T d_i + C_{ij} m_0) \quad (2.10)$$

Donde C_{ij} es la matriz resultado de aplicar el suavizado del modelo y el tamaño más pequeño con respecto a m_0 , descrita por:

$$C_{ij} = \lambda \alpha_s \mathcal{W}_{s_{ij}}^T \mathcal{W}_{s_{ij}} + \lambda \alpha_x \mathcal{W}_{x_{ij}}^T \mathcal{W}_{x_{ij}} + \lambda \alpha_z \mathcal{W}_{z_{ij}}^T \mathcal{W}_{z_{ij}} \quad (2.11)$$

2.2. Aproximación 2.5D

En muchas aplicaciones geofísicas es común encontrarse con estructuras geológicas en el subsuelo cuya distribución de conductividad eléctrica es invariante en una de las tres dimensiones del espacio, incluso teniendo en cuenta que la naturaleza del flujo de corriente eléctrica que es inyectado es tridimensional. Esto puede ocurrir en áreas en las que existan estructuras muy extensas en alguna dirección y que estén formadas por el mismo material o la misma proporción de materiales (foliaciones: estructuras planares formadas por la alineación de minerales en planos preferenciales a través de la roca).

En este estudio se considerará que la distribución de conductividad eléctrica en el subsuelo es de este tipo, es decir, a lo largo de una de las direcciones del espacio (en este caso concreto, será la dirección y) la conductividad eléctrica no varía, y únicamente existirá variabilidad de ésta bajo las direcciones x y z , horizontal y vertical respectivamente (ver Figura 2.2.1(a)).

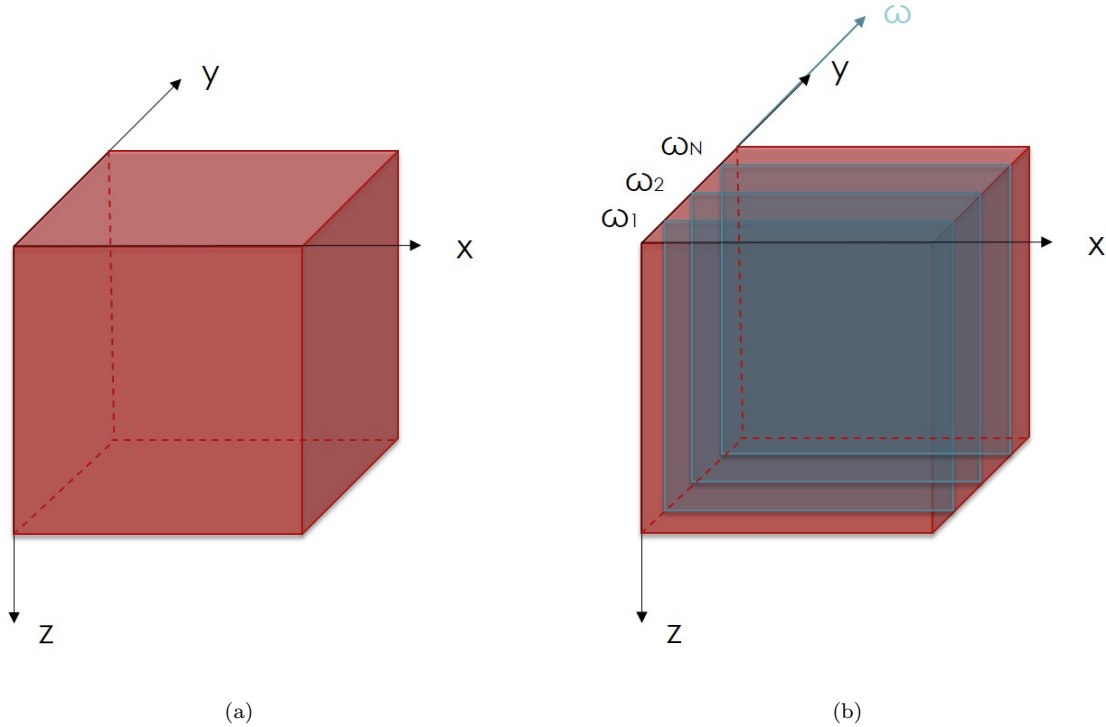


Figura 2.2.1: (a) Ejes coordenados 3D y (b) ejes resultantes de aplicar la transformación de Fourier- coseno

Esto supondrá que las estructuras sean infinitamente extensas en dirección y . De esta forma, y como se explicará en la sección 3, el campo de conductividades pasa a depender únicamente de dos variables ($\sigma = \sigma(x, z)$), aunque no ocurre lo mismo con el campo de potencial eléctrico, que sigue siendo tridimensional. Ante esta situación, *Dey and Morrison* [1979b], *Greenhalgh* [2008], *McGillivray* [1992], *Mundry* [1984], *Snyder* [1976] y *Trevino* [1979] desarrollaron un método en el que, partiendo de la base de que las estructuras geológicas son cuerpos bidimensionales (2D) infinitamente extensos en una dirección del espacio y aplicando la transformación de Fourier-coseno 1D definida en la Ecuación (2.12) a lo

largo de dicha dirección, conseguían capturar las tres dimensiones (3D) de la física implícita en el problema (definida por el campo de potencial eléctrico), reduciendo sustancialmente el coste computacional que supondría resolver el problema directamente en 3D. Esta situación intermedia entre 3D y 2D se denominará a partir de ahora 2.5D.

Se puede definir la transformada directa e inversa de Fourier- coseno 1D como:

$$\bar{\phi}(x, \omega, z) = \int_0^\infty \phi(x, y, z) \cos(\omega y) dy \quad (2.12)$$

$$\phi(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{\phi}(x, \omega, z) \cos(\omega y) d\omega \quad (2.13)$$

donde ω es la variable de Fourier (a partir de este momento número de onda o coeficiente de Fourier) asociada a la coordenada y , $\phi(x, y, z)$ es el campo de potencial eléctrico en 3D, y $\bar{\phi}(x, \omega, z)$ es el campo de potencial eléctrico en 2.5D, es decir, en el dominio de Fourier.

La solución presentada de esta forma es teóricamente exacta, pero, en la práctica, sería preferible resolver la transformación de Fourier-coseno para un número reducido de coeficientes de Fourier, y no para un número infinito de ellos (tal y como ocurre en las Ecuaciones (2.12) y (2.13)). Con este fin, *Dey and Morrison* [1979b], *Pidlisecky and Knight* [2008] y *Xu et al.* [2000] han desarrollado diferentes sistemas para optimizar el número de coeficientes de Fourier utilizados al aplicar la transformación de Fourier-coseno, de forma que el algoritmo presentado ofrecerá una aproximación a la solución 3D. Por lo tanto, con el objetivo de obtener una buena aproximación al problema 3D sin emplear demasiado tiempo en resolverlo, se utilizarán los coeficientes optimizados calculados por *Pidlisecky and Knight* [2008] o *Xu et al.* [2000] (en función del caso de estudio).

Lo que se muestra en la Figura 2.2.1(b) es el resultado de aplicar la Ecuación (2.12) sobre el problema. Aquí aparecen un número N de planos $x-z$ (uno por cada coeficiente de Fourier empleado), en los que la distribución de conductividad eléctrica en $x-z$ es idéntica para cada uno. Por lo tanto, lo que ocurre es que el problema original en 3D se ha visto reducido a un conjunto de problemas en 2D (tantos como coeficientes de Fourier se empleen para resolverlo) en el dominio de Fourier (2.5D), de modo que, resolviendo este conjunto de problemas y aplicando la Ecuación (2.13), será posible obtener la aproximación a la solución 3D de la que se ha hablado anteriormente.

Este último paso de aplicar la transformación inversa de Fourier será desarrollado más en detalle en la sección 3.9.

2.3. Teorías de Modelado Numérico del Flujo de Corriente Eléctrica

2.3.1. Teoría *Equivalent Porous Media* (EPM)

Los estudios existentes relacionados con el modelado numérico del flujo de corriente eléctrica en el subsuelo no están adaptados al trabajo en medios con presencia de fracturas. La mayoría de ellos se basan en la discretización de aproximaciones numéricas a la ecuación modificada de Helmholtz, que se explicará en la siguiente sección, usando indistintamente métodos de elementos finitos, diferencias finitas o volúmenes finitos (e.g. *Dey and Morrison* [1979b], *McGillivray* [1992], *Mundry* [1984], *Pidlisecky and Knight* [2008], *Rücker et al.* [2006], *Snyder* [1976], *Trevino* [1979]). Además, consideran únicamente aquellas heterogeneidades que están por encima de un determinado tamaño de celda de la malla, de modo que las que son menores en tamaño no son apreciables numéricamente. Con ello, es posible

establecer un comportamiento continuo del campo eléctrico, que permite que dichas aproximaciones no sean muy adecuadas para trabajar con fracturas, donde la relación de resistividades eléctricas entre la matriz y el contenido interior de la fractura puede ser de varios órdenes de magnitud, así como ocurre con el tamaño de las fracturas comparado con el del dominio de estudio. Esta es la base de la teoría EPM.

De esta forma, para conseguir un dominio homogéneo en un medio con fracturas, se debería discretizar completamente el dominio con un tamaño de celda que se correspondería con el tamaño de la fractura más pequeña, lo que conllevaría un elevado coste computacional y de tiempo para la resolución de la distribución de resistividad eléctrica del subsuelo, incluso teniendo en cuenta que las técnicas de discretización y mallado han evolucionado mucho (técnicas *multigrid* (*Moucha and Bailey* [2004], *Tang et al.* [2010])).

Con el objetivo de resolver este problema, diferentes autores han intentado plantear soluciones para calcular la distribución de resistividad eléctrica en terrenos con presencia de fracturas, entre las que se encuentran: a) la homogeneización de las fracturas por debajo de un determinado tamaño de celda de mallado, de forma que la red de fracturas queda representada como un volumen representativo elemental (REV), reduciendo así el número de elementos que requieren ser modelados y permitiendo un mallado más grueso que no implique problemas de elevado coste computacional (*Herwanger et al.* [2004]). El problema aquí es que se está suponiendo que dicho REV funciona como un todo, con unas propiedades homogéneas y continuas, hecho que, en la realidad, no ocurre, excepto cuando se trata de una red muy densa de fracturas; b) el uso de teorías *effective-medium* y/o soluciones analíticas, desarrolladas para calcular diferentes propiedades eléctricas de las rocas con fracturas del subsuelo (*Sævik et al.* [2013], *Sævik et al.* [2014]).

Este tipo de teorías *effective-medium* se basan en la determinación de diferentes propiedades de materiales compuestos por dos o más componentes macroscópicamente heterogéneos, en los que, por lo tanto, la/s propiedad/es en cuestión varía/n en función del punto de observación. Existe un amplio conjunto de estas teorías, aunque se puede decir que todas ellas coinciden en que el cálculo de dichas propiedades se realiza gracias a información sobre la geometría de los componentes del material compuesto, proporción de éstos en el área de estudio y propiedades individuales de cada componente (*Stroud* [1998]). Con esta información, se presenta un modelo homogéneo simplificado, con unas propiedades "efectivas", que se resuelve normalmente. Es por ello que este tipo de soluciones, así como las soluciones analíticas, no son adecuadas para situaciones reales de medios con fracturas, en las que no se puede determinar a priori la geometría del problema, así como tampoco se conocen los valores de conductividad o resistividad eléctrica de los componentes o la composición de los mismos. Estas aproximaciones manejan situaciones con redes de fracturas simplificadas o idealizadas, que no se corresponden con las posibilidades existentes en la naturaleza.

En conclusión, las redes de fracturas representadas mediante este tipo de teorías poseen unos valores de conductividad y resistividad eléctricas homogéneos, algo que no es común en situaciones reales, y que por tanto no permite aplicarlas a escenarios en los que aparezcan rocas fracturadas en el subsuelo.

2.3.2. Teorías *Dual Porosity* (DP) y *Discrete Fracture Network* (DFN)

Pasando al campo de la hidrología, es decir, al transporte de fluidos, existen varias teorías que permiten modelar el flujo de dichos fluidos (generalmente agua) en entornos rocosos con fracturas. Entre ellas podemos encontrar las dos que se referencian en el título de esta sección. Ambas son completamente compatibles entre sí, y de hecho se suelen aplicar de forma simultánea.

En cuanto a la teoría *Dual Porosity* (DP), simplemente considera que existen dos partes diferenciadas en el dominio de estudio, una correspondiente a la matriz o roca madre, y otra correspondiente a la red de fracturas. Además, aquí se considerará que las fracturas forman un conjunto continuo, con unas propiedades determinadas, y no se representarán como elementos individuales y diferenciables. Cada una de estas partes se caracteriza por una porosidad diferente, que se relaciona con la permeabilidad fluida de la roca/fractura de forma directa. Concretamente, la matriz tendrá una muy baja permeabilidad al fluido, lo que hace que no circule fluido a través de ella y funcione como una especie de “almacén”, y la red de fracturas poseerá una elevada permeabilidad al fluido, que facilitará la fluencia de material a lo largo de ella, funcionando por lo tanto como una canal de transporte. Esta teoría es tanto más adecuada cuanto mayor sea la diferencia entre permeabilidades de las dos zonas citadas (*Gautam and Mohanty* [2004]). Aquí además se establece un intercambio de fluido entre matriz y fractura que podría llegar a ocurrir en función de esa diferencia de permeabilidades (menor diferencia, más intercambio y viceversa), y que se modela mediante un coeficiente de intercambio que aparecerá en las ecuaciones del modelo (ver sección 3.8).

Por otro lado, aparece la teoría *Discrete Fracture Network* (DFN) (e.g. *Cacas et al.* [1990], *Dverstorp and Andersson* [1989], *Long and Billaux* [1987]), mediante la cual se establece que el flujo de un determinado fluido se producirá únicamente a través de una red de fracturas claramente interconectadas entre sí, de forma que la matriz que las contiene no permite la fluencia de dicho flujo a través de ella. Además, esta teoría aporta una elevada simplificación al modelo, puesto que considera las fracturas como elementos geométricos sencillos, ya sean discos, líneas o planos (e.g. *Berrone et al.* [2015], *De Dreuzy et al.* [2013], *Pichot et al.* [2012]). Es por ello que se puede considerar una de las teorías de modelado de flujos fluidos más utilizadas hasta la fecha para diferentes tipos de entornos rocosos con presencia de fracturas (e.g. *Painter and Cvetkovic* [2005], *Rogers et al.* [2010]).

La suposición de que el fluido únicamente circula a través de una red de fracturas interconectadas es muy restrictiva, aunque en hidrología se puede justificar y es válida, debido a que la diferencia entre la transmitividad de las fracturas y la permeabilidad fluida de la matriz puede ser de varios órdenes de magnitud, lo que supone que prácticamente no existan filtraciones de fluido desde las fracturas hacia la matriz. Sin embargo, no es posible aplicar directamente la teoría DFN al modelado del flujo de corriente eléctrica, donde la diferencia de conductividades eléctricas entre matriz y fracturas es, en el peor de los casos, de alrededor de dos órdenes de magnitud, de forma que no puede ignorarse la contribución de la matriz rocosa al flujo de corriente eléctrica, ya sea por filtraciones de flujo desde las fracturas o a través de fracturas no conectadas a la red principal o que ponen fin a una de ellas y deriva directamente a la matriz.

Con el objetivo de aunar las ventajas que presentan estas tres teorías presentadas anteriormente (EPM, DP y DFN) para el modelado del flujo de corriente eléctrica en el subsuelo, se pretende combinar el bajo coste computacional que favorecen las teorías DFN y DP con una representación de la parte de la matriz rocosa (EPM) en casos en que la

permeabilidad fluida de ésta no pueda ser despreciada y exista intercambio de flujo entre ambas partes. Surge así la teoría *Discrete-Dual Porosity* (DDP), propuesta en hidrología para el modelado de flujos fluidos (*Lee et al.* [2001], *Li et al.* [2008]). De esta forma, el flujo a través de la red de fracturas es modelado gracias a la teoría DFN, mientras que aquél que ocurre a través de la matriz se modela gracias a las teorías EPM y DP, es decir, se crea una malla no demasiado fina en la que se aplican técnicas estándar de elementos, diferencias o volúmenes finitos.

Las principal ventaja de esta teoría es la posibilidad de considerar flujo a través de cualquiera de las estructuras existentes en el subsuelo, intercambiándose fluido entre unas y otras indistintamente. Este intercambio vendrá regulado por un coeficiente de intercambio de flujo, definido en la escala de la matriz rocosa. Por el contrario, actualmente uno de los mayores problemas de esta teoría se basa en la definición de este coeficiente, puesto que lo que se ha implementado hasta la fecha es una aproximación al modelado del flujo de corriente eléctrica de la definición del mismo en el ámbito de la hidrología. Esta aproximación no es muy adecuada en cuanto a que la diferencia entre conductividades eléctricas en el primer caso es menor que la de conductividades hidráulicas en el segundo (ver sección 3.8). Otro problema que se presenta en la actualidad es la consideración general de que no existe variación de potencial eléctrico a lo largo de una fractura dentro de una misma celda en las que se divide la matriz, lo que genera importantes errores en el intercambio de flujo de corriente eléctrica.

En este proyecto se presentará, con el objetivo de llegar a un compromiso entre la reducción del coste computacional y la mejora de la precisión del problema, un modelo fruto de la aplicación del algoritmo 2.5D explicado con anterioridad en la sección (2.2) sobre la teoría DDP desarrollada por *Roubinet and Irving* [2014]. En particular, se expondrá una formulación analítica para la variación del potencial eléctrico a lo largo de la red de fracturas, que posteriormente se integrará dentro de un modelo numérico basado en la técnica de volúmenes finitos para determinar el campo eléctrico en la matriz rocosa. Esta modificación de la teoría DDP permitirá reducir notablemente el coste computacional, por un lado, debido a la reducción procedente de la aplicación de la teoría DDP, y por otro lado, causado por la simplificación 2.5D.

La resolución del problema se llevará a cabo a través de un código en C++, de elaboración propia, que permitirá calcular la distribución de potencial eléctrico en el dominio de Fourier en cada uno de los planos generados tras aplicar la transformación definida en la Ecuación (2.12). Una vez conseguido este conjunto de soluciones, se utilizará un sencillo código en Matlab[®], que permitirá aplicar la transformación inversa de Fourier al conjunto formado por las soluciones anteriores y que estará basado en las ecuaciones presentadas en la sección 3.9.

En la validación del modelo (sección 4.1) se realizarán diferentes comparaciones entre los resultados obtenidos por la vía anterior para el campo de potencial eléctrico y las expresiones analíticas correspondientes, que se referenciarán a lo largo del desarrollo del trabajo. Además, en esta sección se presentará la oportunidad de elaborar un método adaptado a este caso particular para eliminar la singularidad presente en las ecuaciones que rigen el problema (sección B).

En cuanto a los resultados presentados en la sección 4.2, la solución para la distribución de resistividad eléctrica en el subsuelo con la que se compararán los resultados obtenidos a través de los códigos nombrados anteriormente será una solución numérica calculada con COMSOL Multiphysics[®] en conjunción con Matlab[®]. Una pequeña explicación

acerca de los códigos utilizados se presenta en el apéndice D.

El trabajo publicado por *Roubinet and Irving* [2014] sirve como base para el desarrollo de la teoría DDP de una manera sencilla en dos dimensiones, y en este trabajo se ampliará dicha funcionalidad con la aplicación del algoritmo 2.5D para calcular la distribución de resistividad real en el subsuelo teniendo en cuenta la tridimensionalidad de los entornos medioambientales simulados en este estudio. Por ello, cabe destacar el valor instructivo de este proyecto en cuanto a la novedad de los conceptos expresados, que servirán de base para futuros trabajos en el campo de la geología y la geofísica.

3. Metodología

Del mismo modo que al comienzo del manuscrito, a continuación se plasmará brevemente la estructura que se pretende seguir a la hora de desarrollar la formulación del problema a lo largo de la sección 3.

Utilizando las hipótesis presentadas durante la sección 2, (2.5D y DDP), se pasará a aplicar dichas aproximaciones a la ecuación de conservación de la carga o ecuación de Poisson en 3D. Esto resultará en la generación de un sistema de ecuaciones lineales que permitirá calcular el valor del potencial eléctrico en cada una de las celdas de la matriz, así como en todos los nodos que conforman la red de fracturas (secciones 3.5, 3.6 y 3.7). Además, se hará referencia a la nomenclatura utilizada específicamente para el desarrollo de las ecuaciones anteriores (sección 3.4), así como a la definición de diferentes conceptos o términos necesarios para la comprensión del problema, como son el coeficiente de intercambio α_{fm}^{IJ} (sección 3.8) y la transformación inversa de Fourier (sección 3.9).

Como aportación a la mejora de los resultados presentados en la sección 4.2, se planteará una solución al problema de la singularidad existente en el punto de inyección (sección 3.2), solución que será posteriormente verificada en la presentación de resultados.

3.1. Planteamiento General del Problema

En esta sección se presentarán las ecuaciones y expresiones que van a regir el problema de estudio, siguiendo la estructura de desarrollo que se plantea en *Roubinet and Irving* [2014].

Como se detalla en la sección 2.1.1, el método de medición utilizado como base experimental para futuras aplicaciones es el método ERT, en el que se disponen cuatro electrodos (dos de intensidad y dos de potencial) a lo largo de una línea en la superficie del terreno. A modo de simplificación, y sabiendo que las ecuaciones presentadas a continuación presentan un comportamiento lineal, se utilizará el principio de superposición para únicamente calcular la distribución de potencial debida a una sola fuente de intensidad, pudiendo posteriormente superponer dos soluciones de este tipo para generar el problema completo, como se muestra en la Figura (3.1.1). Esto viene motivado principalmente por las condiciones de contorno utilizadas en el problema, cuya definición se detalla en el apéndice C.

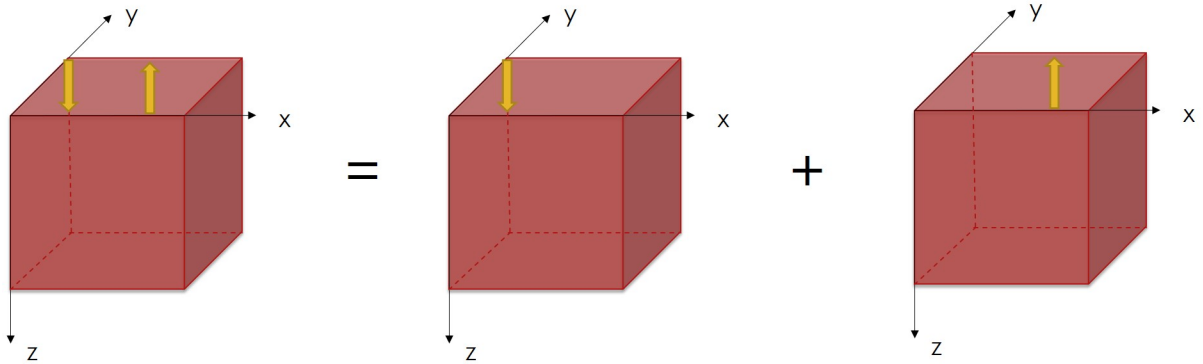


Figura 3.1.1: *Superposición de problemas de una única inyección (con posiciones de fuente según Figura (2.1.3))*

3.2. Formulación del Problema

El flujo de corriente eléctrica bajo condiciones estacionarias estará gobernado por la ecuación de Poisson (conservación de la carga), dada en 3D por:

$$-\nabla \cdot [\sigma(x, y, z) \vec{\nabla} \phi(x, y, z)] = I \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (3.1)$$

En la Ecuación (3.1), $\sigma(x, y, z)$ es la distribución de conductividad eléctrica del medio ($S \text{ m}^{-1}$, S: Siemens), I es la corriente inyectada desde un punto del dominio (A, A: Amperios) y $\phi(x, y, z)$ es el campo de potencial eléctrico para el cual se va a resolver el problema (V, V: Voltios). Además, (x_0, y_0, z_0) es la posición de la fuente de intensidad y $\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$ es la función delta de Dirac centrada en la posición de dicha fuente (m^{-3}).

Con el objetivo de poder aplicar la transformación de Fourier definida en las Ecuaciones (2.12) y (2.13), se considerará constante la conductividad del medio en la dirección y , de modo que $\partial \sigma(x, y, z) / \partial y = 0$, lo que permite reescribir la Ecuación (3.1) como:

$$-\nabla \cdot [\sigma(x, z) \vec{\nabla} \phi(x, y, z)] = I \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (3.2)$$

De esta forma, se reduce la complejidad del campo de conductividad eléctrica, que ahora estará formado por estructuras geológicas infinitamente largas en la dirección del eje y , como se describe en la sección 2.2.

Aplicando la transformación definida en la Ecuación (2.12) a la Ecuación (3.2), se puede reducir el problema 3D para el campo de potencial eléctrico presentado en la Ecuación (3.1) a una serie de problemas 2D en el dominio de Fourier, tantos como números de onda se tomen, descritos por la siguiente ecuación:

$$-\nabla [\sigma(x, z) \vec{\nabla} \bar{\phi}(x, \omega, z)] + \omega^2 \sigma(x, z) \bar{\phi}(x, \omega, z) = I \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \int_0^\infty \delta(y - y_0) \cos(\omega y) dy \quad (3.3)$$

Teniendo en cuenta que nuestro problema es simétrico en torno al plano $x - z$ que pasa por el punto de inyección, y_0 , se puede considerar que la transformada de Fourier-coseno de la función delta de Dirac en y_0 viene dada por:

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(y - y_0) \cos(\omega y) dy = 2 \int_0^\infty \delta(y - y_0) \cos(\omega y) dy \quad (3.4)$$

Además, considerando la definición de la propia función delta de Dirac, se puede establecer que:

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(y - y_0) \cos(\omega y) dy = \cos(\omega y_0) \quad (3.5)$$

Por lo tanto, el problema general en 2.5D vendrá expresado por:

$$-\nabla [\sigma(x, z) \vec{\nabla} \bar{\phi}(x, \omega, z)] + \omega^2 \sigma(x, z) \bar{\phi}(x, \omega, z) = \frac{I}{2} \cos(\omega y_0) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \quad (3.6)$$

Donde los operadores divergencia y gradiente están definidos en 2D como $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z})$ y $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z})$ respectivamente.

Con objeto de simplificar el problema, en adelante se asumirá que la fuente de intensidad está localizada en la posición $y_0 = 0$. Esto es válido desde un punto de vista físico, puesto que el problema siempre puede ser analizado considerando que el plano $y = 0$ es donde se sitúa la fuente, pero además se hace por una cuestión práctica, que permite simplificar la solución del problema, como se explicará en el apéndice A.

Esta simplificación lleva a una expresión final para el campo de potencial eléctrico en el dominio de Fourier descrita mediante la siguiente expresión:

$$-\nabla \cdot [\sigma(x, z) \vec{\nabla} \bar{\phi}(x, \omega, z)] + \omega^2 \sigma(x, z) \bar{\phi}(x, \omega, z) = \frac{I}{2} \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) \quad (3.7)$$

Como se puede apreciar, la Ecuación (3.7) es una ecuación diferencial elíptica (la ecuación de Poisson), aunque en este caso, en el dominio de Fourier. Este tipo de ecuaciones, cuando la fuente no es idénticamente nula (ecuación de Poisson), presentan una singularidad puntual, localizada exactamente en el punto de inyección de la corriente eléctrica, comportamiento descrito en la ecuación (A.4) por la función de Bessel modificada del segundo tipo de orden 0, $\mathcal{K}_0(f)$. Esta función, que tiende a infinito en el punto designado f (en este caso $x_0 = 0$ y $z_0 = 0$), provoca que no exista solución numérica para dicho punto y sea necesario aproximar numéricamente el resultado aquí.

Es por eso que diferentes autores han desarrollado una serie de métodos orientados a eliminar este punto singular y su influencia en la solución general del problema. Dichos algoritmos están basados en los métodos de elementos y diferencias finitas (e.g. *Li and Spitzer* [2002], *Lowry et al.* [1989], *McGillivray* [1992], *Rücker et al.* [2006], *Zhao and Yedlin* [1996]), de modo que, en el apéndice A, se presentará una adaptación de estos algoritmos al método de volúmenes finitos, en el que se basa gran parte de este trabajo.

Es importante notar que, como se vio en la sección 2.2, tras la transformación, el problema ha sido modificado notablemente. En primer lugar, se han reducido en una unidad las dimensiones de las estructuras geológicas posibles en cuanto a la distribución de conductividad eléctrica en el subsuelo, pasando de estructuras tridimensionales a bidimensionales. En segundo lugar, se ha reducido el problema 3D para el campo de potencial eléctrico a uno más manejable desde el punto de vista computacional.

De esta forma y teniendo en cuenta la física implícita en la transformación de Fourier, se han generado una serie de problemas en 2D en el dominio de Fourier, (uno para cada número de onda, basados en la Ecuación (3.7)) que han de ser resueltos individualmente. Con la solución de cada uno de estos problemas se podría formar un paquete de soluciones de Fourier para el campo de potencial eléctrico que, mediante la aplicación de la Ecuación (2.13), podrían dar lugar a una aproximación al campo de potencial eléctrico que se obtendría al realizar la resolución directa del problema en 3D.

Tal y como se expresó en la sección 2, la resolución directa en 3D es muy costosa computacionalmente, de modo que a continuación se presentará la alternativa propuesta para el estudio de medios rocosos con presencia de fracturas haciendo uso de las ecuaciones planteadas en esta misma sección y tomando como base el modelo DDP, descrito para el caso bidimensional por *Roubinet and Irving* [2014].

3.3. Estrategia de Modelado del Problema

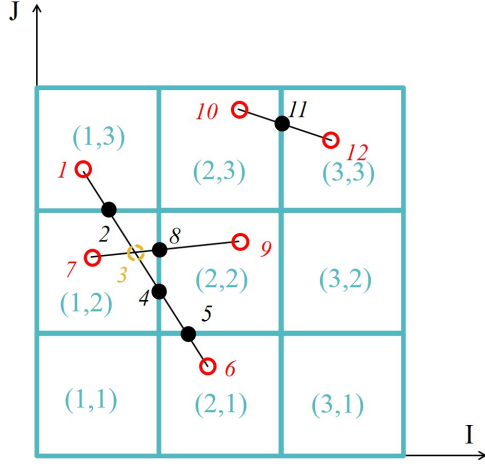


Figura 3.3.1: Discretización del modelo DDP propuesto. La matriz se divide en bloques regulares (cuadrados azules), identificados por los índices (I,J) , donde las fracturas son representadas por elementos 1-D que se subdividen en segmentos (líneas negras), los cuales están delimitados por nodos (círculos numerados). Los nodos pueden ser intersecciones entre el límite de un bloque y una fractura (puntos negros), intersecciones entre fracturas (punto verde) o extremos de fractura (puntos rojos)

sección 3.8.

Para ello, se seguirán los siguientes pasos, desarrollados más en detalle en las secciones correspondientes:

1. Obtención de una expresión analítica para el potencial eléctrico a lo largo de un segmento de fractura, considerando la posibilidad de intercambio de flujo entre fractura y matriz (sección 3.5).
2. Desarrollo de un sistema de ecuaciones lineales que describa la conservación de la carga en la escala de la red de fracturas, considerando del mismo modo que anteriormente intercambio entre fracturas y matriz. Se utilizará una teoría DFN modificada, apoyándose en los resultados obtenidos del paso 1 (sección 3.6).
3. Desarrollo de otro sistema de ecuaciones lineales que completa al obtenido en el paso 2, describiendo la conservación de la carga en la escala de la matriz, existiendo intercambio de flujo entre matriz y fracturas. Se utilizará una teoría modificada del método de volúmenes finitos basada en los resultados del paso 1 (sección 3.7).

El problema de estudio desarrollado consiste en modelar el flujo de corriente eléctrica a través de un medio rocoso en el que existen fracturas. Esto requerirá considerar una propagación de intensidad de corriente a través de las distintas estructuras geológicas, es decir, fracturas y matriz. Como se explicó en la sección 2.3.2, la diferencia de conductividades eléctricas entre fracturas y matriz en el modelado del flujo de corriente eléctrica no es mayor a dos órdenes de magnitud, por lo que no se puede considerar que únicamente exista flujo a través de la red de fracturas del subsuelo, sino que la corriente fluye a través de matriz y red de fracturas indistintamente.

De este modo, para captar el comportamiento del flujo de corriente eléctrica en todas las escalas presentes en el problema, se aplicará la conservación de la carga descrita en la Ecuación (3.7) de forma separada en cada una de ellas, a saber, fracturas, red de fracturas y matriz. Además, el intercambio de flujo entre fracturas y matriz se modela a través de la diferencia de potencial existente entre ambas y gracias a un coeficiente de intercambio definido en la

3.4. Nomenclatura y Discretización del Modelo

El nuevo concepto dimensional del problema, surgido de aplicar la transformación de Fourier-coseno al problema 3D inicial, permite escribir cada uno de los problemas de Fourier generados como dominios bidimensionales (planos $x - z$ y fracturas unidimensionales que se extienden infinitamente en la dirección y del espacio. Es por ello que la discretización del dominio de estudio se puede subdividir igualmente en escalas de actuación.

1. **Escala de la Matriz** Se discretizará en bloques o celdas regulares, en este caso en cuadrados, identificados por los índices (I, J) , donde $I = 1, \dots, N_X$ y $J = 1, \dots, N_Y$, siendo N_X y N_Y el número de bloques en la dirección x y z respectivamente.
2. **Escala de la fractura** Las fracturas dentro del dominio vienen representadas por elementos unidimensionales divididos en segmentos delimitados por nodos. Como se observa en la Figura 3.3, se puede distinguir entre tres tipos de nodos: a) nodos 1, 6, 7, 9, 10, 12 de extremos de fractura (círculos rojos); b) nodos 2, 4, 5, 8, 11 de intersección entre fractura y bloque de matriz (círculos negros); c) nodo 3 de intersección entre fracturas (círculo amarillo).

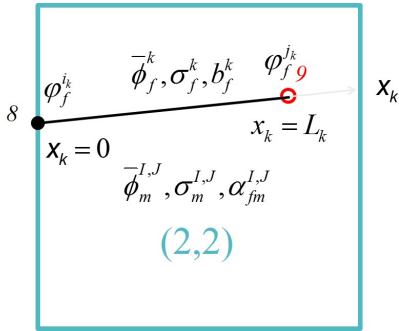


Figura 3.4.1: Zoom del bloque $(2,2)$ de la matriz de la Figura 3.3, mostrando únicamente el segmento de fractura que une los nodos 8 y 9. Los nodos que delimitan el segmento k^{esimo} están localizados en $x_k = 0$ y $x_k = L_k$, donde L_k es la longitud del segmento en cuestión y x_k denota la variable espacial 1-D a lo largo del mismo. La conductividad eléctrica del segmento viene dada por σ_f^k , la apertura de la fractura por b_f^k y el potencial eléctrico por $\bar{\phi}_f^k = \bar{\phi}_f^k(x_k)$. Los valores $\bar{\phi}_f^{i_k}$ y $\bar{\phi}_f^{j_k}$ están referidos al valor del potencial eléctrico en $x_k = 0$ y $x_k = L_k$ respectivamente. En la escala de la matriz, $\sigma_m^{I,J}$, $\bar{\phi}_m^{I,J}$ y $\alpha_{fm}^{I,J}$ sirven para definir la conductividad eléctrica del bloque, el potencial eléctrico del bloque y el coeficiente de intercambio del bloque respectivamente.

mayúscula (I, J) denotan el valor de la magnitud en el bloque (I, J) de la escala de la matriz. Además, se utilizará la denominación de volumen de control (V_{IJ}) en referencia a cada bloque de la matriz para que la notación sea coherente con el método de volúmenes finitos utilizado.

Además, las magnitudes utilizadas en la resolución de cada uno de estos problemas serán magnitudes definidas en el dominio de Fourier, de forma que su sentido físico ya no es el mismo que antes de aplicar la transformación, por lo que se denotarán de forma diferente a las magnitudes tridimensionales, generalmente con determinados símbolos colocados sobre la magnitud particular.

En cuanto a la numeración de los segmentos, tal y como se ilustra en la Figura 3.4, éstos vienen definidos por un índice, k , y los nodos que los delimitan, i_k y j_k . Además, cada segmento está caracterizado por una apertura b_f^k (m) y una conductividad eléctrica σ_f^k ($S \cdot m^{-1}$). El potencial eléctrico a lo largo de un segmento se denota por $\bar{\phi}_f^k$ y el valor del mismo en los nodos de los extremos por $\bar{\phi}_f^{i_k}$ y $\bar{\phi}_f^{j_k}$.

En la escala de la matriz, se puede definir una conductividad eléctrica y un potencial eléctrico del bloque, denotados por $\sigma_m^{I,J}$ ($S \cdot m^{-1}$) y $\bar{\phi}_m^{I,J}$ respectivamente (Figura (3.4)). Es importante notar que en el desarrollo posterior del problema, aquellas magnitudes que presenten índices en minúscula (i_k, j_k) describen la magnitud en los nodos i_k, j_k , mientras que aquellas que se nombren con índices en

3.5. Expresión Analítica para el Potencial Eléctrico a lo largo de un Segmento de Fractura

Considerando un segmento de fractura 2-D, k , delimitado por dos nodos, i_k y j_k , con conductividad eléctrica σ_f^k constante en toda su longitud L_k , con un ancho (apertura) b_f^k y teniendo en cuenta que no existe término fuente en este caso, es posible aplicar la Ecuación (3.7) de conservación de la carga en 2.5D para determinar la variación de potencial eléctrico a lo largo de la longitud del segmento ($\bar{\phi}_f^k(x_k, \omega)$):

$$-\sigma_f^k \frac{\partial^2 \bar{\phi}_f^k}{\partial x_k^2} - \sigma_f^k \frac{\partial^2 \bar{\phi}_f^k}{\partial z_k^2} + \omega^2 \sigma_f^k \bar{\phi}_f^k = 0 \quad (3.8)$$

Donde x_k e z_k son las variables espaciales que describen la geometría de la fractura, variando de la siguiente forma: $x_k = 0, \dots, L_k$ e $z_k = 0, \dots, b_f^k$.

Integrando a lo largo de la dirección y_k podemos simplificar la ecuación anterior, teniendo en cuenta que el segmento tiene una apertura dada por b_f^k :

$$-\sigma_f^k \int_0^{b_f^k} \left(\frac{\partial^2 \bar{\phi}_f^k}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 \bar{\phi}_f^k}{\partial z_k^2} \right) dz_k + \sigma_f^k \int_0^{b_f^k} \omega^2 \bar{\phi}_f^k dz_k = 0 \quad (3.9)$$

$$-\sigma_f^k \frac{\partial^2 \bar{\phi}_f^k}{\partial x_k^2} b_f^k - \sigma_f^k \frac{\partial \bar{\phi}_f^k}{\partial z_k} \Big|_0^{b_f^k} + \sigma_f^k \omega^2 \int_0^{b_f^k} \bar{\phi}_f^k dz_k = 0 \quad (3.10)$$

Como se establece en la sección 3.3, el intercambio de flujo de corriente eléctrica entre fracturas y matriz se modelará a través de la diferencia de potencial entre ambas. De esta forma, se establecerá que el segundo término de la Ecuación (3.10) simboliza el intercambio de flujo de corriente eléctrica entre fractura y matriz, producido a lo largo de la zona de contacto entre ambas. Por lo tanto:

$$\bar{Q}_{fm} = -\sigma_f^k \frac{\partial \bar{\phi}_f^k}{\partial z_k} \Big|_0^{b_f^k} = -\alpha_{fm}^{IJ} (\bar{\phi}_m^{IJ} - \bar{\phi}_f^k) \quad (3.11)$$

Donde $\bar{\phi}_m^{IJ}$ es el potencial del bloque de la matriz en el que se encuentra el segmento de fractura analizado y α_{fm}^{IJ} es el coeficiente de intercambio entre fractura y matriz, definido sobre la escala de la matriz y del que se hablará en la sección 3.8, de forma que \bar{Q}_{fm} representa el propio intercambio de flujo corriente eléctrica, haciendo las veces de fuente/sumidero de corriente eléctrica.

Además, se considerará que el término integral de la Ecuación (3.10) se puede aproximar por el valor medio del potencial eléctrico con respecto a la dirección z_k , eliminando así la dependencia con dicha dirección del potencial eléctrico a lo largo del segmento:

$$\int_0^{b_f^k} \bar{\phi}_f^k dz_k = \bar{\phi}_f^k b_f^k \quad (3.12)$$

Por lo tanto, la ecuación de conservación de la carga en 2.5D para el segmento presentado puede reescribirse como:

$$-\sigma_f^k \frac{\partial^2 \bar{\phi}_f^k}{\partial x_k^2} - \frac{\alpha_{fm}^{IJ}}{b_f^k} (\bar{\phi}_m^{IJ} - \bar{\phi}_f^k) + \sigma_f^k \omega^2 \bar{\phi}_f^k = 0 \quad (3.13)$$

O también:

$$-\sigma_f^k \nabla^2 \bar{\phi}_f^k(x_k, \omega) + \omega^2 \sigma_f^k \bar{\phi}_f^k(x_k, \omega) = -\bar{Q}_{fm} \quad (3.14)$$

El signo con el que se define el término fuente \bar{Q}_{fm} es completamente arbitrario, pero debe ser coherente en todo caso entre matriz y fractura, de modo que, en el caso de que la corriente fluya desde la fractura hacia la matriz, \bar{Q}_{fm} se define como positiva. Consecuentemente, cuando la corriente fluye desde la matriz hacia la fractura, se definirá \bar{Q}_{fm} como negativa. Independientemente de en qué escala se analice el problema, siempre se debe mantener este criterio.

Continuando con el desarrollo del problema, es posible reorganizar la Ecuación (3.13) para resolverla más fácilmente como una ecuación diferencial ordinaria lineal:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_f^k}{\partial x_k^2} - (\omega^2 + \Gamma_{IJ}^k) \bar{\phi}_f^k = -\Gamma_{IJ}^k \bar{\phi}_m^{IJ} \quad (3.15)$$

Donde:

$$\Gamma_{IJ}^k = \frac{\alpha_{fm}^{IJ}}{\sigma_f^k b_f^k} \quad (3.16)$$

Resolviendo esta ecuación mediante la descomposición en solución homogénea y particular, es posible obtener la siguiente expresión:

$$\bar{\phi}_f^k(x_k, \omega) = C_1 \exp\left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} x_k\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} x_k\right) + \frac{\Gamma_{IJ}^k}{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} \bar{\phi}_m^{IJ} \quad (3.17)$$

Para calcular C_1 y C_2 es necesario hacer uso de las condiciones de contorno para los nodos de los extremos del segmento de fractura analizado. De esta forma y como se observa en la Figura 3.4, el valor del potencial eléctrico en dichos puntos viene dado por condiciones Dirichlet tales que $\bar{\phi}_f^k(x_k = 0, \omega) = \varphi_f^{i_k}$ y $\bar{\phi}_f^k(x_k = L_k, \omega) = \varphi_f^{j_k}$. Por lo tanto, las constantes C_1 y C_2 de la Ecuación (3.17) vienen dadas por:

$$C_1 = \varphi_f^{i_k} - C_2 - \frac{\Gamma_{IJ}^k}{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} \bar{\phi}_m^{IJ} \quad (3.18)$$

$$C_2 = \frac{\varphi_f^{j_k} - \left(\varphi_f^{i_k} - \bar{\phi}_m^{IJ} \frac{\Gamma_{IJ}^k}{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2}\right) \exp\left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} L_k\right) - \frac{\Gamma_{IJ}^k}{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} \bar{\phi}_m^{IJ}}{\gamma(L_k)} \quad (3.19)$$

Donde:

$$\gamma(x_k) = \exp\left(-\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} x_k\right) - \exp\left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} x_k\right) \quad (3.20)$$

De este modo, sustituyendo ambos valores en la Ecuación (3.17), es posible obtener una expresión analítica para el campo de potencial eléctrico a lo largo de un segmento de fractura, el cual dependerá únicamente del valor del potencial eléctrico en sus extremos ($\varphi_f^{i_k}$ y $\varphi_f^{j_k}$), así como del valor del potencial eléctrico en el bloque de la matriz que lo contiene ($\bar{\phi}_m^{IJ}$).

$$\bar{\phi}_f^k(x_k, \omega) = \beta(x_k) \varphi_f^{i_k} + \frac{\gamma(x_k)}{\gamma(L_k)} \varphi_f^{j_k} + \frac{\Gamma_{IJ}^k}{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} \left(1 - \beta(x_k) - \frac{\gamma(x_k)}{\gamma(L_k)}\right) \bar{\phi}_m^{IJ} \quad (3.21)$$

Donde:

$$\beta(x_k) = \exp\left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} x_k\right) - \frac{\gamma(x_k)}{\gamma(L_k)} \exp\left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} L_k\right) \quad (3.22)$$

Esta expresión es el paso previo para integrar el intercambio de flujo de corriente eléctrica entre fractura y matriz dentro de una teoría DFN modificada en la escala de la fractura y una teoría de volúmenes finitos también modificada en la escala de la matriz.

3.6. Modelo DFN Modificado para la Red de Fracturas

En hidrología, la teoría de modelado DFN se basa en el principio de conservación de la masa en cada una de las intersecciones entre distintas redes de fracturas (e.g. Berkowitz [2002], Moreno and Neretnieks [1993]). Trasladando este concepto al modelado del flujo de corriente eléctrica, se buscará aplicar la conservación de la carga en cada una de dichas intersecciones. Esto se llevará a cabo mediante la integración de la Ecuación (3.7), en la escala de la fractura, en torno a un volumen de control definido por V_i , donde estará contenido el nodo de la intersección, i .

$$\int_{V_i} \left[-\nabla \cdot \left(\sigma_f^k \vec{\nabla} \bar{\phi}_f^k \right) + \omega^2 \sigma_f^k \bar{\phi}_f^k \right] dV = 0 \quad (3.23)$$

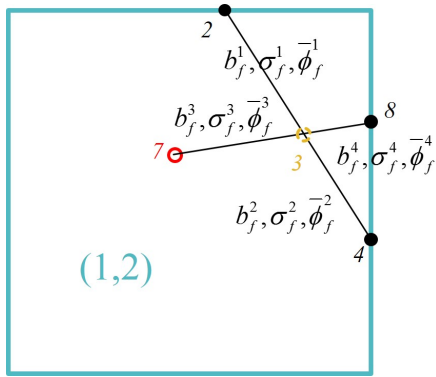


Figura 3.6.1: Zoom del bloque (1,2) de la matriz de la Figura (3.3) que muestra la intersección localizada en el nodo 3. Esta intersección es compartida por los segmentos $k = 1, 2, 3$ y 4 , caracterizados por su segundo nodo $j_k = 2, 4, 7$ y 8 . Cada segmento posee su propia apertura (b_f^k), conductividad eléctrica (σ_f^k) y potencial eléctrico ($\bar{\phi}_f^k = \bar{\phi}_f^k(x_k)$).

Como se puede observar, dado que se trata de una situación en la que no existen fuentes o sumideros de corriente eléctrica sino únicamente flujos entrantes o salientes en el nodo de intersección, el término fuente no existe en este caso. Además, al tratarse de una superficie cerrada la que forma el volumen de integración, es posible aplicar el Teorema de Gauss al primer término de la Ecuación (3.23), relacionando la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial (en este caso el potencial eléctrico) con el flujo de dicho campo vectorial a través de la superficie cerrada que conforma dicho volumen, de forma que:

$$\int_{V_i} \left[-\nabla \cdot \left(\sigma_f^k \vec{\nabla} \bar{\phi}_f^k \right) + \omega^2 \sigma_f^k \bar{\phi}_f^k \right] dV = - \int_{S_i} \sigma_f^k \vec{\nabla} \bar{\phi}_f^k \cdot \vec{n}_{S_i} dS + \int_{V_i} \omega^2 \sigma_f^k \bar{\phi}_f^k dV = 0 \quad (3.24)$$

Donde S_i es la superficie que delimita el volumen de control V_i y \vec{n}_{S_i} es el vector unitario orientado hacia el exterior de dicha superficie.

Considerando ahora que el nodo de intersección i es compartido por un número de segmentos de fractura N_i , los cuales se identifican por su nodo extremo j_k , y teniendo en cuenta que dichos segmentos tienen una apertura b_f^k y una conductividad eléctrica σ_f^k , la Ecuación (3.24) puede aproximarse por:

$$\sum_{k=1}^{N_i} b_f^k \sigma_f^k \left(\omega^2 L_k \bar{\phi}_f^k|_{x_k=0} - \frac{\partial \bar{\phi}_f^k}{\partial x_k} \Big|_{x_k=0} \right) = 0 \quad (3.25)$$

A modo de ejemplo, la Figura (3.6), que representa un zoom del bloque (1,2) de la Figura (3.3), muestra la intersección entre dos fracturas en el nodo 3. Este nodo aparece como el extremo compartido de cuatro segmentos, distinguidos por su segundo nodo ($j_k = 2, 4, 7$, y 8) y numerados como $k = 1, 2, 3$ y 4 , respectivamente. Cada segmento de fractura se caracteriza por una apertura constante b_f^k y una conductividad eléctrica σ_f^k , también constante, además de un potencial eléctrico variable a lo largo de su longitud, $\bar{\phi}_f^k = \bar{\phi}_f^k(x_k)$. Para este caso particular, la conservación de la carga viene dada por la Ecuación (3.25) con $N_i = 4$.

En la formulación clásica del modelo DFN, la variación del potencial eléctrico entre los nodos extremos de un segmento de fractura es lineal entre ambos, puesto que no existe ningún tipo de intercambio de flujo entre matriz y

fractura. Por el contrario, en la modificación que se plantea al modelo DFN, se debe tener en cuenta este intercambio. Es por esto que, para considerar dicho intercambio, se va a introducir la expresión analítica para el potencial eléctrico presentada en la Ecuación (3.21) en el cálculo del flujo de potencial eléctrico a través de la intersección ($\frac{\partial \bar{\phi}_f^k}{\partial x_k}$) que aparece en la Ecuación (3.25). Esto conduce a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \bar{\phi}_f^k}{\partial x_k} = a_{i_k} \varphi_f^{i_k} + a_{j_k} \varphi_f^{j_k} + a_{IJ} \bar{\phi}_m^{IJ} \quad (3.26)$$

Donde:

$$\begin{aligned} a_{i_k} &= \sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} \exp \left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} x_k \right) + \frac{\lambda(x_k)}{\gamma(L_k)} \sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} \exp \left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} L_k \right) \\ a_{j_k} &= -\frac{\lambda(x_k)}{\gamma(L_k)} \sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$a_{I,J} = \frac{\Gamma_{IJ}^k}{\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2}} \left\{ -\exp \left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} x_k \right) + \frac{\lambda(x_k)}{\gamma(L_k)} \left[1 - \exp \left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} L_k \right) \right] \right\}$$

Con:

$$\lambda(x_k) = \exp \left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} x_k \right) + \exp \left(-\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} x_k \right) \quad (3.28)$$

Combinando las Ecuaciones (3.25) y (3.26) para cada uno de los nodos de intersección presentes en el dominio, es posible obtener un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son los valores del potencial eléctrico en los nodos extremos de los segmentos de las fracturas ($\varphi_f^{i_k}$ y $\varphi_f^{j_k}$) y en los bloques de la matriz ($\bar{\phi}_m^{IJ}$). El resultado vendría dado por:

$$\sum_{k=1}^{N_i} b_f^k \sigma_f^k \left\{ \left(\omega^2 L_k \beta(x_k) - a_{i_k} \right) \varphi_f^{i_k} + \left(\omega^2 L_k \frac{\gamma(x_k)}{\gamma(L_k)} - a_{j_k} \right) \varphi_f^{j_k} + \left[\omega^2 L_k \frac{\Gamma_{IJ}^k}{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} \left(1 - \beta(x_k) - \frac{\gamma(x_k)}{\gamma(L_k)} \right) - a_{IJ} \right] \bar{\phi}_m^{IJ} \right\} \quad (3.29)$$

Es importante notar que el sistema de ecuaciones que se presenta en la Ecuación (3.29) no es completo, es decir, hay más incógnitas que ecuaciones. Dicho sistema se verá complementado con la adición de ecuaciones relacionadas con la aplicación de la conservación de la carga en la escala de la matriz, como se verá posteriormente en la sección 3.7.

3.7. Modelo de Volúmenes Finitos Modificado en la Escala de la Matriz

Del mismo modo que en la sección 3.5, en esta ocasión se aplicará la Ecuación (3.7) de conservación de la carga a la escala de la matriz con el objetivo de completar el sistema de ecuaciones presentado en la sección anterior. Para ello, se integrará dicha ecuación en torno a un volumen de control V_{IJ} (correspondiente a cada una de las celdas en las que se ha discretizado la matriz), teniendo en cuenta que cada bloque de la matriz tendrá una conductividad eléctrica constante dada por σ_m . De este modo:

$$-\int_{V_{IJ}} \nabla \cdot \left(\sigma_m \vec{\nabla} \bar{\phi}_m^{IJ} \right) dV + \int_{V_{IJ}} \omega^2 \sigma_m \bar{\phi}_m^{IJ} dV = \int_{V_{IJ}} \bar{Q}_{fm} dV \quad (3.30)$$

En esta expresión, el signo del término fuente \bar{Q}_{fm} es positivo, al contrario que en la Ecuación (3.14), puesto que la definición de \bar{Q}_{fm} considera positivo el flujo de corriente eléctrica que circula desde la fractura hasta la matriz, y

al mirar el problema desde la escala de la matriz, lo que antes era un sumidero de corriente para la fractura (signo negativo) se convierte en una fuente para la matriz (signo positivo).

Para simplificar el seguimiento del desarrollo de esta ecuación, es preferible tratar en primer lugar el lado izquierdo de la igualdad, y posteriormente el derecho. De este modo:

- **Término de la izquierda:** Del mismo modo que en la sección anterior, se aplicará el Teorema de Gauss al primer término del lado izquierdo, de forma que el resultado final vendrá dado por:

$$-\int_{V_{IJ}} \nabla \cdot (\sigma_m \vec{\nabla} \bar{\phi}_m^{IJ}) dV + \int_{V_{IJ}} \omega^2 \sigma_m \bar{\phi}_m^{IJ} dV = -\int_{S_{IJ}} (\sigma_m \vec{\nabla} \bar{\phi}_m^{IJ}) \cdot \vec{n}_{S_{IJ}} dS + \int_{V_{IJ}} \omega^2 \sigma_m \bar{\phi}_m^{IJ} dV \quad (3.31)$$

Donde S_{IJ} es la superficie cerrada que delimita el volumen de control V_{IJ} , y $\vec{n}_{S_{IJ}}$ es el vector unitario orientado hacia el exterior de dicha superficie.

Procediendo de esta forma, no es posible conseguir una expresión analítica para el potencial eléctrico en la matriz, por lo que es necesario utilizar un método de discretización, en este caso el método de volúmenes finitos, para obtener una ecuación con la que poder modelar el flujo de corriente eléctrica a través de ella. Por lo tanto, discretizando el problema mediante el método de volúmenes finitos, es posible obtener una expresión discreta para la Ecuación (3.31). Dicha expresión tiene en cuenta la interacción de cada celda de la matriz con aquellas que la rodean, y viene dada por:

$$\begin{aligned} & -\int_{S_{IJ}} (\sigma_m \vec{\nabla} \bar{\phi}_m^{IJ}) \cdot \vec{n}_{S_{IJ}} dS + \int_{V_{IJ}} \omega^2 \sigma_m \bar{\phi}_m^{IJ} dV = \\ & = C_{I,J}(\sigma_m) \bar{\phi}_m^{I,J} + C_{I-1,J}(\sigma_m) \bar{\phi}_m^{I-1,J} + C_{I+1,J}(\sigma_m) \bar{\phi}_m^{I+1,J} + C_{I,J-1}(\sigma_m) \bar{\phi}_m^{I,J-1} + C_{I,J+1}(\sigma_m) \bar{\phi}_m^{I,J+1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Donde los índices I, J representan la posición que ocupa la celda en la discretización de la matriz según la Figura (3.3) y los coeficientes $C_{I,J}(\sigma_m)$, $C_{I-1,J}(\sigma_m)$, $C_{I+1,J}(\sigma_m)$, $C_{I,J-1}(\sigma_m)$ y $C_{I,J+1}(\sigma_m)$ se definen como:

$$\begin{aligned} C_{I-1,J}(\sigma_m) &= -\frac{\Delta z}{\Delta x} \mathcal{H}_{(I-1,J),(I,J)}^m & C_{I+1,J}(\sigma_m) &= -\frac{\Delta z}{\Delta x} \mathcal{H}_{(I+1,J),(I,J)}^m \\ C_{I,J-1}(\sigma_m) &= -\frac{\Delta x}{\Delta z} \mathcal{H}_{(I,J-1),(I,J)}^m & C_{I,J+1}(\sigma_m) &= -\frac{\Delta x}{\Delta z} \mathcal{H}_{(I,J+1),(I,J)}^m \\ C_{I,J}(\sigma_m) &= -C_{I-1,J}(\sigma_m) - C_{I+1,J}(\sigma_m) - C_{I,J-1}(\sigma_m) - C_{I,J+1}(\sigma_m) + \omega^2 \sigma_m \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (3.33)$$

Siendo Δx y Δz las longitudes del bloque en cuestión en las direcciones x y z respectivamente, y \mathcal{H} la media armónica de los valores de conductividad eléctrica de las celdas adyacentes a la celda I, J . Se utilizará la media armónica definida en *Pidlisecky and Knight* [2008]:

$$\mathcal{H}_{1,2}^m = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\frac{\Delta x_1}{\sigma_m^1} + \frac{\Delta x_2}{\sigma_m^2}} \quad (3.34)$$

Como se establece en la sección 3.3, todas las celdas son regulares, de modo que $\Delta x_1 = \Delta x_2$ por lo que, la expresión anterior se puede reescribir como:

$$\mathcal{H}_{1,2}^m = \frac{2}{\frac{1}{\sigma_m^1} + \frac{1}{\sigma_m^2}} \quad (3.35)$$

Siendo las celdas 1 y 2 adyacentes entre sí.

- **Término de la derecha (término fuente):** Como se dijo anteriormente, el término fuente \bar{Q}_{fm} simboliza el intercambio de flujo de corriente eléctrica entre fractura y matriz, que únicamente se produce a través de los segmentos de fractura que se encuentran localizados en el mismo volumen de control V_{IJ} que se está analizando. Por lo tanto, el término de la derecha de la igualdad presentada en la Ecuación (3.30) puede aproximarse por:

$$\int_{V_{i,j}} \bar{Q}_{fm} dV = \sum_{k=1}^{N_{IJ}^f} \int_0^{L_k} \bar{Q}_{fm} dx_k \quad (3.36)$$

Donde N_{IJ}^f representa el número de segmentos de fractura contenidos en el volumen V_{IJ} .

Utilizando la definición de \bar{Q}_{fm} dada en la Ecuación (3.11), la expresión anterior se puede escribir como:

$$\int_{V_{i,j}} \bar{Q}_{fm} dV = -\alpha_{fm}^{IJ} \bar{\phi}_m^{IJ} \sum_{k=1}^{N_{IJ}^f} L_k + \alpha_{fm}^{IJ} \sum_{k=1}^{N_{IJ}^f} \tilde{\phi}_f^k \quad (3.37)$$

Donde:

$$\tilde{\phi}_f^k = \int_0^{L_k} \bar{\phi}_f^k dx_k \quad (3.38)$$

De forma similar al cálculo del lado izquierdo de la igualdad, se va a utilizar la expresión analítica para el potencial eléctrico a lo largo de un segmento de fractura para calcular este último término de la Ecuación (3.38). Para ello hay que calcular $\tilde{\phi}_f^k$ como la integral de la Ecuación (3.21), de modo que la expresión resultante puede escribirse como:

$$\tilde{\phi}_f^k = D_{i_k} \varphi_f^{i_k} + D_{j_k} \varphi_f^{j_k} + D_{IJ} \bar{\phi}_m^{IJ} \quad (3.39)$$

Donde cada coeficiente viene dado por una expresión diferente:

$$D_{i_k} = \frac{\exp\left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} L_k\right) - 1}{\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2}} + \frac{\exp\left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} L_k\right)}{\gamma(L_k) \sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2}} \left[\exp\left(-\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} L_k\right) + \exp\left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} L_k\right) - 2 \right] \quad (3.40)$$

$$D_{j_k} = -\frac{\exp\left(-\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} L_k\right) + \exp\left(\sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} L_k\right) - 2}{\gamma(L_k) \sqrt{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2}}$$

$$D_{IJ} = \frac{\Gamma_{IJ}^k}{\Gamma_{IJ}^k + \omega^2} (L_k - D_{j_k} - D_{i_k})$$

Por lo tanto, la ecuación final que representa la integral del término fuente \bar{Q}_{fm} en torno a un volumen de control V_{IJ} , resulta en:

$$\int_{V_{IJ}} \bar{Q}_{fm} dV = \alpha_{fm}^{IJ} \bar{\phi}_m^{IJ} \left[\sum_{k=1}^{N_{IJ}^f} (D_{IJ} - L_k) \right] + \alpha_{fm}^{IJ} \sum_{k=1}^{N_{IJ}^f} (D_{j_k} \varphi_f^{j_k} + D_{i_k} \varphi_f^{i_k}) \quad (3.41)$$

De esta forma, combinando las Ecuaciones (3.7) y (3.41) dentro de la Ecuación (3.30), es posible obtener una

ecuación discretizada que permita completar el sistema de ecuaciones dado por la Ecuación (3.29):

$$\left[C_{I,J} + \alpha_{fm}^{IJ} \sum_{k=1}^{N_{IJ}^f} (L_k - D_{IJ}) \right] \bar{\phi}_m^{IJ} + C_{I-1,J} \bar{\phi}_m^{I-1,J} + \quad (3.42)$$

$$C_{I+1,J} \bar{\phi}_m^{I+1,J} + C_{I,J-1} \bar{\phi}_m^{I,J-1} + C_{I,J+1} \bar{\phi}_m^{I,J+1} - \alpha_{fm}^{IJ} \sum_{k=1}^{N_{IJ}^f} (D_{ik} \varphi_f^{ik} + D_{jk} \varphi_f^{jk}) = 0$$

Donde los coeficientes C están definidos en la Ecuación (3.33).

Esta expresión, aplicada a cada uno de los bloques que conforman la discretización de la matriz, conduce a un sistema lineal cuyas incógnitas serán de nuevo los valores de potencial eléctrico para los nodos de los segmentos de fracturas (φ_f^{ik} y φ_f^{jk}) así como para los bloques de la matriz ($\bar{\phi}_m^{IJ}$). Este sistema está formado por un número de ecuaciones $N_x \cdot N_z$, donde N_x y N_z se corresponden con el número de celdas en que se divide la matriz en la dirección x y z respectivamente. De esta forma, combinando el conjunto de las Ecuaciones (3.29) y las Ecuaciones (3.7), se formaría un sistema de ecuaciones lineales con las incógnitas anteriormente nombradas que permitiría calcular los valores de potencial eléctrico tanto en los nodos de los segmentos de las fracturas como en cualquier posición de la matriz.

3.8. Coeficiente de intercambio entre matriz y fractura (α_{fm}^{IJ})

Un componente numérico del problema del que aún no se ha establecido un valor es el denominado coeficiente de intercambio, el cual controla la cantidad de flujo de corriente eléctrica que circula entre matriz y fractura, α_{fm}^{IJ} . El valor de este coeficiente ha sido anteriormente definido en *Roubinet and Irving* [2014], definición que se utilizará en este estudio y que será justificada a continuación.

Para ello, es necesario explicar la procedencia de dicha definición, puesto que se trata de una aproximación basada en el coeficiente de difusión de masa de fluido calculado en estudios de hidrología para determinar cuánta cantidad de masa de fluido circula entre matriz y fractura. Diversos estudios basados en la teoría DP (*Dual Porosity*), explicada en la sección 2.3.2, han demostrado que, básicamente, el valor del coeficiente de intercambio de masa entre matriz y fractura depende de las propiedades y la discretización elegida para la matriz (en concreto, es función del tamaño de celda). Por ejemplo, considerando un conjunto simple de fracturas con forma sencilla contenido en una matriz, se pueden obtener diferentes expresiones analíticas para dicho coeficiente de intercambio a través de soluciones simplificadas de la ecuación de difusión (e.g. *Haggerty and Gorelick* [1995], *Warren et al.* [1963]). Sin embargo, con la intención de representar de mejor forma el dinamismo del propio intercambio de masa y/o escenarios geológicos más realistas, se han propuesto nuevas aproximaciones al cálculo del coeficiente de difusión de masa, (e.g. *Alboin et al.* [2002], *Carrera et al.* [1998], *Dykhuizen* [1990], *Haggerty and Gorelick* [1995], *Haggerty et al.* [2000], *Kfoury et al.* [2004], *Noetinger and Estebenet* [2000], *Noetinger et al.* [2001], *Zimmerman et al.* [1993], *Zyvoloski et al.* [2008]).

Por el contrario, muy pocos autores han examinado el problema bajo la teoría DDP (*Discrete-Dual Porosity*) utilizada en este trabajo, que considerará las fracturas como elementos individualizados con propiedades heterogéneas, y no como un grupo compacto y homogéneo, con propiedades determinadas e iguales para la totalidad del conjunto,

sin diferencias entre las distintas fracturas que lo conforman (lo que haría la teoría DP). Es por ello, que la definición del coeficiente de intercambio de flujo de corriente eléctrica será una adaptación al ámbito del campo eléctrico de algunas de las que se aportan en diversos estudios hidrológicos.

Por lo tanto, el coeficiente de difusión de masa de fluido pasará a ser, en un marco eléctrico, el coeficiente de intercambio de flujo de corriente eléctrica, cuya definición se propondrá a continuación. Esta definición estará basada en dos teorías hidrológicas, de las que es posible extraer lo siguiente:

1. El intercambio de masa entre matriz y fracturas está gobernado por el coeficiente de difusión transversal de menor valor, considerando los coeficientes de fractura (D_T^f) y matriz (D_T^m) [Roubinet *et al.*, 2012].

$$\alpha_{fm}^{IJ} = \min(D_T^m, D_T^f) \quad (3.43)$$

Esto significará que, la difusión transversal (es decir, aquella dependiente de los coeficientes D_T^f en la fractura y D_T^m en la matriz, según la Figura (3.8.1)) máxima posible la dará la estructura con menor posibilidad de difusión.

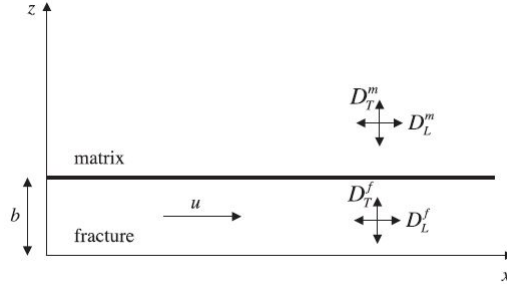


Figura 3.8.1: Representación esquemática del sistema matriz-fractura ([Roubinet *et al.*, 2012])

2. [Li *et al.*, 2008] justifican que la presión alrededor de la fractura está linealmente distribuida, siendo el salto de presión entre fractura y matriz el encargado de generar la circulación de fluido entre ambas. De esta forma es posible obtener la siguiente expresión para el salto de presión entre fractura y matriz:

$$\Delta p = \frac{(p_i^m - p_j^f)}{\langle d \rangle} \quad (3.44)$$

Aquí es de gran importancia el término $\langle d \rangle$, definido como la distancia media normal existente entre las fracturas contenidas en una celda de la matriz y cada uno de los puntos de dicha celda, y que será utilizado posteriormente para la definición de α_{fm}^{IJ} en el presente estudio. Esto viene representado en la Figura (3.8.2).

Llegando a un acuerdo entre ambas teorías, es posible definir la siguiente expresión [Roubinet and Irving, 2014]:

$$\alpha_{fm}^{IJ} = \frac{\min(\sigma_{IJ}^f, \sigma_{IJ}^m)}{\langle d \rangle} \quad (3.45)$$

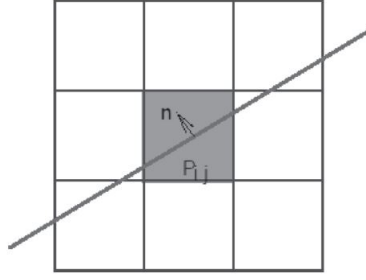


Figura 3.8.2: Distancia $< d >$ desde un punto cualquiera de una celda a una fractura contenida en dicha celda [Li et al., 2008].

Donde, al pasar al ámbito del campo eléctrico, se han sustituido los coeficientes de difusión por las conductividades eléctricas de matriz σ_{IJ}^m y fractura σ_{IJ}^f del volumen de control definido por la celda (I, J) . En la Ecuación (3.45), σ_{IJ}^f se define como la media de la conductividad eléctrica de todas las fracturas contenidas en dicho volumen de control.

Como se observará en la sección 4.2, esta formulación para el coeficiente de intercambio de flujo de corriente eléctrica parece ser válida y precisa para la representación de dicho intercambio de flujo entre matriz y fractura en este problema. Aún así, es importante decir que, para la aplicación de la teoría DDP hecha en este estudio, es muy sencillo modificar la definición de α_{fm}^{IJ} dada en la Ecuación (3.45) para considerar definiciones alternativas para dicho coeficiente, siendo este enfoque propicio para estudios futuros.

3.9. Transformación Inversa de Fourier

Tal y como se estableció en la sección 2.2, una vez resuelto el conjunto de problemas 2D en el dominio de Fourier generados tras aplicar la Ecuación (2.12) al problema 3D, es necesario deshacer dicha transformación, de modo que se pueda conseguir reconstruir el dominio tridimensional del que se partió. Para lograrlo se requiere aplicar la Ecuación (2.13) al conjunto de soluciones 2.5D calculadas con el objetivo de generar un único campo de potencial eléctrico en tres dimensiones. Esta ecuación se encargará de superponer cada uno de los planos que conforman las soluciones 2.5D aplicando algún coeficiente de peso en el proceso.

Como se verá a continuación, la aplicación de la Ecuación (2.13) no es inmediata, sino que implica haber utilizado un número infinito de números de onda (ω) en el cálculo de la solución en 2.5D, y ya se explicó en la sección 2.2 que se buscará reducir los números de onda seleccionados con la intención de disminuir así el coste computacional que supondrá dicha resolución. En esta dirección, *Dey and Morrison* [1979b], *Pidlisecky and Knight* [2008] y *Xu et al.* [2000] desarrollaron diferentes métodos para optimizar la elección de los números de onda, de forma que, tanto la resolución de los problemas 2.5D como su superposición para reconstruir las tres dimensiones del problemas fuesen lo más rápidas y efectivas posibles, sin perder calidad en la solución. Estos métodos parten de la existencia de una o varias fuente de inyección de intensidad de corriente en la superficie terrestre, de modo que en aquellos casos en los que no exista ninguna de estas inyecciones, será inevitable el uso de una elevada cantidad de números de onda para

resolver el problema.

Es por ello que en este trabajo se han querido plantear las dos posibilidades, ilustradas posteriormente con sus correspondientes ejemplos en la sección 4.1. En ambos casos, el proceso de transformación inversa se realizará mediante la elaboración de un código Matlab[®] (ver apéndice D).

– Inversión Estándar de Fourier:

En este caso se aplicará directamente la Ecuación (2.13) sobre la solución entregada por el código C++ con en el que se resuelve el problema en 2.5D. Este método se puede usar para casos en los que no existe una inyección de corriente en el dominio de estudio así como para aquellas situaciones en las que hay algún punto de inyección, aunque, como se verá más adelante, es posible utilizar unos determinados números de onda óptimos para aquellos casos en los que existe alguna fuente de inyección de corriente.

Como se explica brevemente en la sección 2, el código en C++ utilizado para la resolución del campo de potencial eléctrico en el dominio de Fourier, entrega una solución numérica del problema, de forma que para aplicar directamente la Ecuación (2.13) sobre la solución ofrecida por dicho código es necesario en primer lugar discretizar la expresión, puesto que se trata de una expresión integral con límite infinito en el número de onda. Gracias a la discretización de la Ecuación (2.13) presentada más adelante, será posible aproximar el límite infinito en el número de onda por un número suficientemente elevado de números de onda.

De esta forma, a partir de ahora la transformación que se aplicará al problema presentado se denominará *Transformación Discreta Inversa de Fourier-coseno*, obtenida a partir de la ecuación integral de la siguiente forma:

$$\phi_n = \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \int_j^{j+1} \bar{\phi}(\omega) \cos(\omega y_i) d\omega = \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \bar{\phi}_k \cos(\omega_j y_i) \Delta\omega \quad (3.46)$$

Donde N es el número total de números de onda que se han seleccionado para resolver el problema, ϕ_n es el potencial eléctrico en el dominio real, $\bar{\phi}_k$ es el potencial eléctrico en el dominio de Fourier y los índices $i = 0, \dots, N-1$ y $j = 0, \dots, N-1$ son los que recorren los ejes real y de Fourier respectivamente (ver Figura 3.9.1).

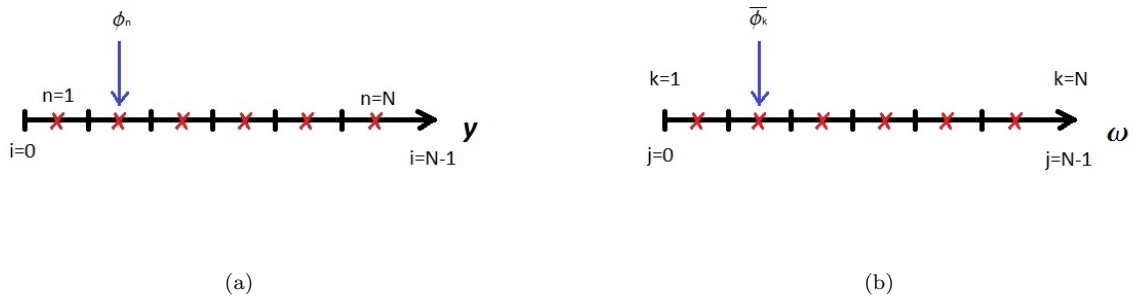


Figura 3.9.1: Ejes real (a) y de Fourier (b) utilizados en la aplicación de la transformación discreta inversa de Fourier-coseno

El procedimiento a seguir para llevar a cabo la transformación inversa sería el siguiente:

1. **Cálculo de la solución $\bar{\phi}_k$ para cada uno de los números de onda:** Esto, como se ha explicado anteriormente, se hace a través del código C++, y supondrá que, al finalizar este primer paso, se disponga de un número N de matrices 2D que poseerán la distribución del campo de potencial eléctrico en el dominio de Fourier, $\bar{\phi}_k$, para cada uno de los números de onda seleccionados, ω_j . De esta forma se puede construir una matriz 3D formada por cada una de las soluciones 2D anteriores, superpuestas una tras otra (ver Figura 3.9.2 izquierda).

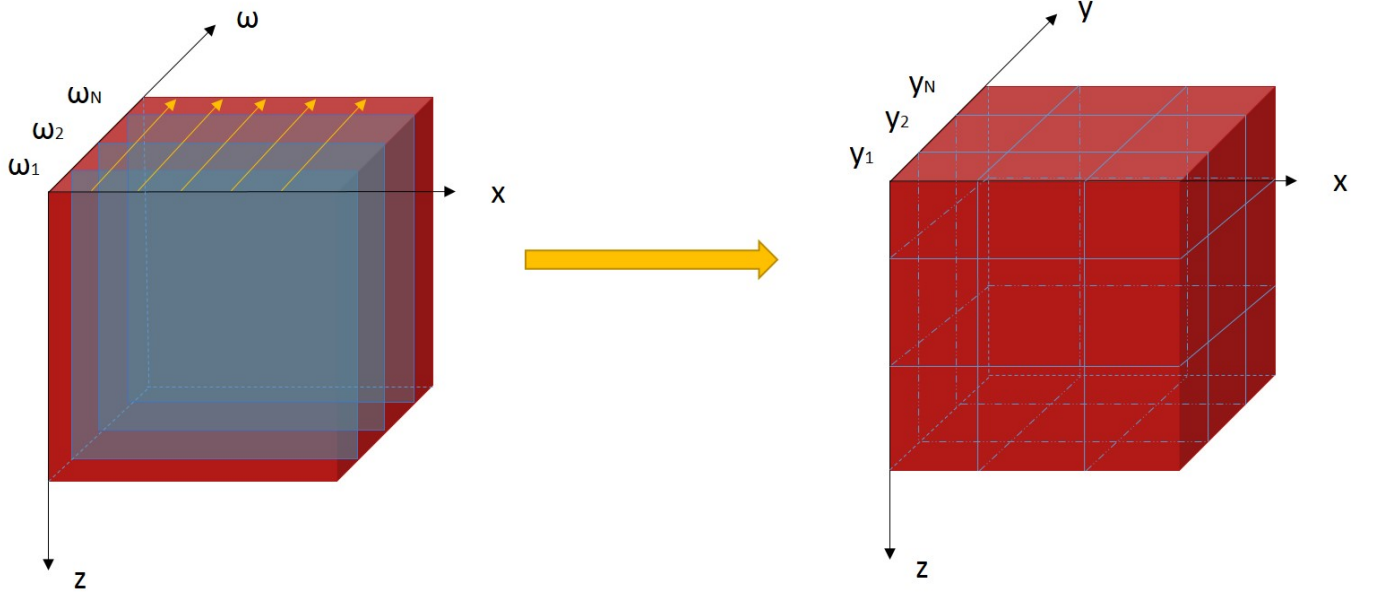


Figura 3.9.2: Matriz 3D (cubo rojo) compuesta por planos 2D en el dominio de Fourier (planos $x - z$ azules)

2. **Aplicación de la Ecuación (3.46) al conjunto de soluciones anterior:** Una vez obtenidas las soluciones para cada número de onda y construida la matriz 3D mostrada en la Figura 3.9.2, se irán tomando individualmente cada uno de los vectores en dirección ω (flechas amarillas de la Figura 3.9.2) y se irá aplicando sobre ellos la Ecuación (3.46). Esto producirá como resultado la generación del campo de potencial eléctrico 3D, que se irá almacenando en una nueva matriz (parte derecha de la Figura 3.9.2).

Debido a que este proceso de inversión se llevará a cabo en Matlab[®], tal y como se dijo en la introducción de este apartado, será necesario buscar una normalización entre la definición de la transformación discreta inversa de Fourier-coseno, definida en la Ecuación (3.46), y la definición de esta misma función construida por defecto en Matlab[®] (*idct.m*). Para ello se definen los índices n y k como:

$$\begin{aligned} k = j + 1 & \rightarrow \omega_j = (k - 1)\Delta\omega \\ n = i + 1/2 & \rightarrow y_i = (n - 1/2)\Delta y \end{aligned} \quad (3.47)$$

El hecho de cambiar de índices es simplemente debido a que en Matlab[®] la primera posición de un vector o

matriz es siempre la posición 1, y no la 0, por lo que los índices i y j no pueden ser utilizados como indicadores de posición de vectores o matrices en Matlab[®]. De esta forma se evita este problema (ver Figura 3.9.1).

En la Ecuación (3.47), T es el dominio en el que se está invirtiendo la solución y por tanto se corresponde con la dimensión del eje ω , y N es el número de divisiones que se hacen en el eje ω , es decir, la cantidad de números de onda que se han elegido para calcular la solución en el dominio de Fourier. Por lo tanto, utilizando la definición dada por *Rodas Posso* [1977] para $\Delta\omega$ y Δy se puede establecer que:

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \frac{\pi}{T} \\ \Delta y &= \frac{T}{N}\end{aligned}\tag{3.48}$$

Es importante definir correctamente tanto T como N para que la aproximación realizada de la solución 3D sea lo mejor posible y no existan errores asociados con la transformación inversa de Fourier. Se verán a continuación los criterios básicos para que dichos parámetros estén definidos correctamente.

Teniendo en cuenta el cambio de índices realizado, la Ecuación (3.46) puede ser reescrita como:

$$\phi_n = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^N \bar{\phi}_k \cos \left[\frac{\pi(k-1)(2n-1)}{2N} \right]\tag{3.49}$$

Ante este mismo problema, Matlab[®] ofrece una función desarrollada por defecto denominada *idct.m*, cuya expresión viene dada por:

$$\begin{aligned}\phi_n &= \sum_{k=1}^N p(k) \bar{\phi}_k \cos \left[\frac{\pi(k-1)(2n-1)}{2N} \right] \\ p(k) &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{if } k = 1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{otherwise} \end{cases}\end{aligned}\tag{3.50}$$

Si se comparan ambas expresiones, es fácil comprobar que únicamente se diferencian en el término $p(k)$ y el coeficiente exterior al sumatorio, $\frac{2}{T}$. Este es un problema menor que puede solucionarse fácilmente balanceando términos, y así se hace en el código implementado para este fin.

Sin embargo, hay dos puntos importantes a los que se debe prestar atención:

(a) *Período (T) y cantidad de números de onda (N)* \rightarrow

La solución del problema propuesto es una función que está definida en un dominio infinito, y no en un espacio acotado. Por lo tanto, a la hora de establecer el valor del período (dominio del eje ω) en el que se va a invertir dicha solución, se ha de tener en cuenta que cuanto mayor sea éste, mejor será la aproximación del dominio definido por T al dominio infinito real.

Además, mediante la discretización realizada en la Ecuación (3.49) únicamente se ha evitado usar un número infinito de números de onda, aunque es necesario establecer exactamente cuantos de ellos se van a utilizar.

Mediante un código de elaboración propia se ha llegado a la conclusión de que los valores que satisfarían de forma simultánea las condiciones de bajo coste computacional y buena aproximación a la solución 3D serían $T = 100$ y $N = 1000$. Cuanto mayor sea N , mejor será la aproximación, pues la cantidad de números de onda se acerca más al valor infinito de la Ecuación (2.13); cuanto mayor sea el período T , mejor será la

aproximación a la solución 3D, puesto que T se aproxima más al valor infinito del dominio en el que se define la solución.

Sin embargo, si se aumenta demasiado la relación T/N , lo que ocurrirá es que el número de divisiones en que se divide el eje ω disminuirá o se mantendrá constante, mientras que se ampliará el dominio de definición del problema, disminuyendo de esta forma la resolución de la solución, puesto que un dominio mayor (T) se divide en las mismas o menos divisiones (N).

(b) *Singularidad en la inversión de Fourier* \rightarrow

Este es un problema que se debe a la aproximación que hace el propio código ante un valor infinito. Por ejemplo, utilizando la Ecuación (A.4) para ilustrar el problema, es posible ver que, aparte de en los puntos de inyección, hay un valor para el que el potencial eléctrico en el dominio de Fourier tiende a infinito, $\omega = 0$. Para evitar esta situación, y basándose en la definición de ω_j realizada en la Ecuación (3.47), se ha establecido que el primer valor para ω_j no sea nulo, sino que ω_j puede redefinirse como:

$$\omega_j = k\Delta\omega = k\frac{\pi}{T} \quad (3.51)$$

De forma que la transformación inversa de Fourier no presentará valores infinitos.

Este es un problema numérico del código Matlab[®] utilizado (*idct.m*), por lo que no afecta a la definición presentada en la Ecuación (3.49), simplemente se evita el valor nulo de ω_j que además no tendría sentido aplicarlo numéricamente, puesto que el valor que ofrecería es infinito.

Según ambas consideraciones, los valores establecidos para los números de onda vendrían dados por la expresión:

$$\omega = \frac{\pi}{T}, \frac{2\pi}{T}, \dots, \frac{N\pi}{T} \quad (3.52)$$

– **Inversión Optimizada de Fourier:**

En este caso, se seleccionarán unos determinados números de onda y coeficientes de Fourier que, elegidos adecuadamente, permitirán calcular una aproximación a la solución 3D lo suficientemente buena y rápida como para optar por este método de aquí en adelante.

La única condición que implícitamente aparece en este método es la existencia de al menos una fuente de inyección de corriente en la superficie terrestre, pues será uno de los pilares en los que se apoyará el desarrollo del algoritmo de optimización, que se verá a continuación.

Este método surge a raíz de la necesidad de disminuir el coste computacional que implicaría simular todo un conjunto de experimentos de campo como los explicados en la sección 2.1, que incluiría la resolución de cada uno de los experimentos individualmente. Esto conllevaría la utilización del método de inversión de Fourier estándar explicado con anterioridad para cada uno de ellos, es decir, resolver para 1.000 números de onda el problema en cuestión por cada experimento. Teniendo en cuenta que un experimento de campo puede incluir cerca de 1.000 mediciones, se podría decir que el número de problemas a resolver en el dominio de Fourier estaría en torno a un millón, lo que queda completamente fuera de lugar.

Es por ello que algunos autores como *Dey and Morrison* [1979b] y *McGillivray* [1992] o posteriormente *Pidlisecky and Knight* [2008] y *Xu et al.* [2000] desarrollaron diferentes métodos para conseguir reducir el número de veces que se resolvía el problema de Fourier por cada experimento, es decir, disminuir la cantidad de números de onda seleccionados. Esto condujo a diferentes algoritmos de optimización, en especial los presentados por los dos últimos autores, que lo que buscaban era minimizar la diferencia entre la solución 3D y un conjunto a determinar de soluciones 2D en el dominio de Fourier.

Los métodos desarrollados por *Pidlisecky and Knight* [2008] y *Xu et al.* [2000] son ligeramente diferentes, siendo el primero bastante más completo que el último hasta el punto de poseer un código Matlab[®] de acceso libre para calcular los números de onda óptimos y los coeficientes de Fourier buscados en diferentes situaciones. Las principales diferencias entre ambos son las siguientes:

(a) *Número de fuentes de inyección/recepción de corriente eléctrica* →

En el primero se supone una inyección y una recepción de corriente eléctrica en la superficie terrestre, tal y como se realiza un experimento ERT, mientras que el segundo de ellos únicamente incluye una fuente de intensidad eléctrica en la superficie terrestre. Como se explicó en la sección 3.1, todo el desarrollo del problema se ha elaborado considerando una única fuente de intensidad, para luego, utilizando el principio de superposición, sumar dos soluciones con una sola fuente, tal y como se muestra en la Figura 3.1.1. En este aspecto, sería preferible utilizar el método propuesto por *Xu et al.* [2000], aunque podría hacerse igualmente con el código Matlab[®] que ofrece *Pidlisecky and Knight* [2008] añadiendo alguna modificación.

(b) *Definición de las condiciones de contorno del problema* →

Debido a la definición que se hace de las condiciones de contorno implementadas en la resolución del problema en el apéndice C, es completamente imposible aplicar simultáneamente el método propuesto por *Pidlisecky and Knight* [2008] en conjunción con las condiciones de contorno elegidas.

Por lo tanto, el método de optimización sugerido en este trabajo será el propuesto por *Xu et al.* [2000], que se ilustra brevemente a continuación.

Básicamente, como se ha dicho antes en este mismo apartado, se trata de minimizar el número de modelos en el dominio de Fourier que, superpuestos, entregan una mejor aproximación a la solución 3D. Este problema de minimización se realizará considerando que el medio en cuestión es homogéneo, es decir, $\sigma \equiv \text{constante}$, para luego extrapolar la solución obtenida a cualquier tipo de dominio. Esto es así porque el problema no-homogéneo de optimización del número de coeficientes de Fourier es muy complicado, y actualmente no existen modelos que lo ejecuten. Además, como se explica en *Pidlisecky and Knight* [2008] y *Xu et al.* [2000], el error cometido al utilizar la solución obtenida sobre un medio homogéneo para medios no-homogéneos es asumible.

Matemáticamente el problema podría expresarse como:

$$\phi(x, y, z) \approx \sum_{j=1}^N \bar{\phi}_j \quad (3.53)$$

Donde N es el número de problemas 2.5D generados, es decir, el número de números de onda empleados.

Utilizando las Ecuaciones (A.3) y (A.4) para reescribir la expresión anterior, se llegaría a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}} &\approx \frac{I}{2\pi\sigma} \sum_{j=1}^N \mathcal{K}_0 \left(\omega_j \sqrt{(x-x_0)^2 + z^2} \right) g_j \\ \frac{1}{r} &\approx \sum_{j=1}^N \mathcal{K}_0 (\omega_j r_\omega) g_j \end{aligned} \quad (3.54)$$

Donde $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia desde el punto de inyección hasta cualquier punto del dominio de estudio en el dominio real, y $r_\omega = \sqrt{(x-x_0)^2 + z^2}$ tiene el mismo sentido pero en el dominio de Fourier.

El método de optimización consistirá en, para unos valores establecidos de (x, y, z) , disminuir la diferencia entre ambos lados de la igualdad, donde tomarán especial importancia los valores de ω , el número de onda, y g , denominado en adelante “peso” de Fourier.

Sin entrar más en detalle, los valores optimizados para ω y g son los siguientes:

$$\begin{aligned} \omega &= (0,0217102 \ 0,2161121 \ 1,0608400 \ 5,0765870) \\ g &= (0,0463660 \ 0,2365931 \ 1,0382080 \ 5,3648010) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Estos serán los valores utilizados tanto para la validación como para los resultados del problema, puesto que ofrecen una muy buena aproximación a la solución 3D con un coste computacional ínfimo, puesto que se ha reducido la cantidad de números de onda seleccionados desde 1.000 a través del método estándar hasta 4 sin prácticamente disminuir la calidad de la solución.

Solo quedaría incidir en que, tras la aplicación de este método de optimización, la nueva expresión para la transformación discreta inversa de Fourier vendría dada por:

$$\phi(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \bar{\phi}(x, \omega_k, z) g_k \quad (3.56)$$

Donde, al contrario que en el método estándar, no se generará una matriz 3D que simbolizará la solución tridimensional tras aplicar esta expresión, sino que únicamente se está calculando el plano frontal de dicha matriz (donde se realizada la inyección de corriente eléctrica) mediante superposición de los planos 2.5D, que en realidad es el único que se utiliza a la hora de determinar la distribución de resistividad eléctrica.

4. Validación del Modelo y Resultados

Una vez planteada la formulación del problema, se pasará a comprobar que todo lo presentado hasta el momento tiene validez física y puede compararse con las soluciones analíticas existentes en la materia, obteniendo resultados favorables que permitan utilizar el modelo planteado en problemas más complejos o incluso sirvan para explicar comportamientos físicos reales en diferentes estudios de campo.

La forma de separar la validación del problema y los resultados obtenidos se basa en los pasos a dar para llegar a la distribución de resistividad real del subsuelo. En primer lugar, y como se ha comentado anteriormente, el código C++ utilizado para la obtención de parte de los resultados presentados en este trabajo, proporciona como valor último el campo de potencial eléctrico en el dominio de Fourier, es decir, en 2.5D. Una vez conseguido esto, se aplica la transformación de Fourier descrita en la sección 3.9 para así obtener el campo de potencial eléctrico en 3D. Estos dos primeros pasos están reflejados en la validación del modelo (sección 4.1). Por último, se podría generar la distribución de resistividad aparente, tal y como se explicó en la sección 2.1. Este paso aparecerá reflejado en la sección 4.2.

La transformación de la distribución de la resistividad aparente en la distribución de resistividad real es un paso que no se abordará en este trabajo, aunque se dará una pequeña idea adicional de la complejidad del proceso de inversión al mostrar los resultados obtenidos, en la sección 4.2.3.

4.1. Validación del Modelo

Con el objetivo de validar el modelo presentado anteriormente, se dividirá el problema completo en tres partes, de forma que sea posible ir validando por separado cada una de ellas, asegurando paso a paso cada una de las hipótesis de las que se ha hecho uso durante el desarrollo del problema. En primer lugar, se validará una situación en la que no existen fracturas, sino que se tratará de un dominio homogéneo (sección 4.1.1) o heterogéneo (sección 4.1.2) en el que se inyectará una corriente a través de unos electrodos situados en la superficie terrestre. Con esto, es posible evaluar si la parte correspondiente a la matriz está bien desarrollada, así como comprobar si el método de eliminación de la singularidad (apéndice B) ofrece alguna mejora sobre la no aplicación del mismo. La consideración única de la parte de la matriz, no entraña una novedad en relación a las teorías existentes hasta la fecha, aunque, como se ha dicho, servirá para corroborar paso a paso que no existen fallos en ninguna parte del modelo. La obtención de forma separada del modelo EPM (solamente considerando la parte de la matriz rocosa) consistirá en aplicar la Ecuación (3.7) pero únicamente considerando que el término α_{fm}^{IJ} es nulo, puesto que no hay fracturas con las que se produzca ningún tipo de intercambio.

En tercer y último lugar se planteará un dominio que presentará un conjunto de fracturas paralelas a la superficie y se forzarán unas condiciones de contorno en las fronteras que permitirán la creación de un gradiente de flujo de corriente eléctrica entre los límites izquierdo y derecho del dominio [Roubinet and Irving, 2014] (sección 4.1.3). Esta situación, como se verá a continuación, no se encuentra como tal en la naturaleza, aunque servirá para comprobar que la teoría DDP está bien aplicada en este proyecto, así como para entender de una mejor manera la implicación que tiene la existencia de fracturas en el medio de estudio.

Es importante matizar que la validación del modelo consistirá en la comparación del campo de potencial eléctrico (y no de la distribución de resistividad aparente o real) entre los valores obtenidos a través del código C++ y las soluciones analíticas que se irán presentando en cada caso.

4.1.1. Inyección de Corriente Eléctrica en un Dominio Homogéneo

En este caso se planteará una situación en la que se produce una inyección y una recepción de corriente eléctrica sobre la superficie terrestre (ver sección 2.1). Bajo estas condiciones y como se explicó en la sección 3.1, se realizarán dos problemas de inyección simple que, mediante el principio de superposición, representarán el problema completo. Se tratará además de un dominio homogéneo con una conductividad eléctrica constante, σ .

A la hora de presentar las diferentes comprobaciones, se tendrá en cuenta que, para darle una mayor coherencia a las validaciones presentadas en esta sección, se utilizarán gráficas 2D que representarán la variación del potencial eléctrico a lo largo del eje x del dominio a una altura $z = 0$, es decir, en la superficie terrestre. Esta variación de potencial en la superficie es la que permitiría en un estudio de campo calcular la diferencia de potencial existente entre los electrodos M y N, generando posteriormente la distribución de resistividad aparente previa al problema de inversión (ver sección 2.1.3).

Con este planteamiento, se calculará por un lado el campo de potencial eléctrico en 2.5D mediante el código C++ utilizado y se aplicará a éste la transformación inversa de Fourier, y, por otro lado, se comparará este resultado con la solución analítica para el campo de potencial eléctrico en 2.5D presentada en la Ecuación (A.4) a la que se aplicará la transformación de Fourier citada anteriormente. De esta forma se comprobará la validez del modelo DDP propuesto.

En la Figura (4.1.1) se puede apreciar que la coincidencia de la solución proporcionada por el código C++ con la solución analítica es completa, exceptuando el punto de inyección/recepción, en el que la solución analítica aporta un valor inferior al de la solución C++. Para solucionar este problema, se desarrolla el método presentado en el apéndice B de eliminación de la singularidad que aparece en este punto. Por ello, en la sección 4.1.2 se presentará la validación de este método, que requiere de la existencia de un dominio heterogéneo.

Por otro lado, si se compara la solución analítica tridimensional para el campo de potencial eléctrico presentada en la Ecuación (A.3) con las soluciones mostradas en la Figura (4.1.1), será posible verificar que la transformación inversa de Fourier definida en la sección 3.9 es válida y genera una solución que coincide con la solución 3D. Sin embargo, como se observa en la Figura (4.1.2), vuelve a aparecer el mismo problema en el punto de inyección/recepción.

En primer lugar, existe diferencia entre ambas soluciones de Fourier, la analítica y la procedente de código C++, lo que se vuelve a atribuir al problema de la singularidad que aparece en la Figura (4.1.1), y que se intentará solucionar en la siguiente sección.

En segundo lugar, existe también una diferencia entre la solución analítica 2.5D y aquella en 3D, aunque en esta ocasión es posible atribuir el error no a un problema de la singularidad que afecta al punto de inyección/recepción, sino a un tema de inversión de Fourier, puesto que, como se explica en la sección 3.9, se está utilizando una transformación aproximada fruto de la discretización de la Ecuación (2.13), incluyendo además una cantidad optimizada, aunque reducida, de números de onda, lo que implica que la inversión no será perfecta. La única solución a este problema

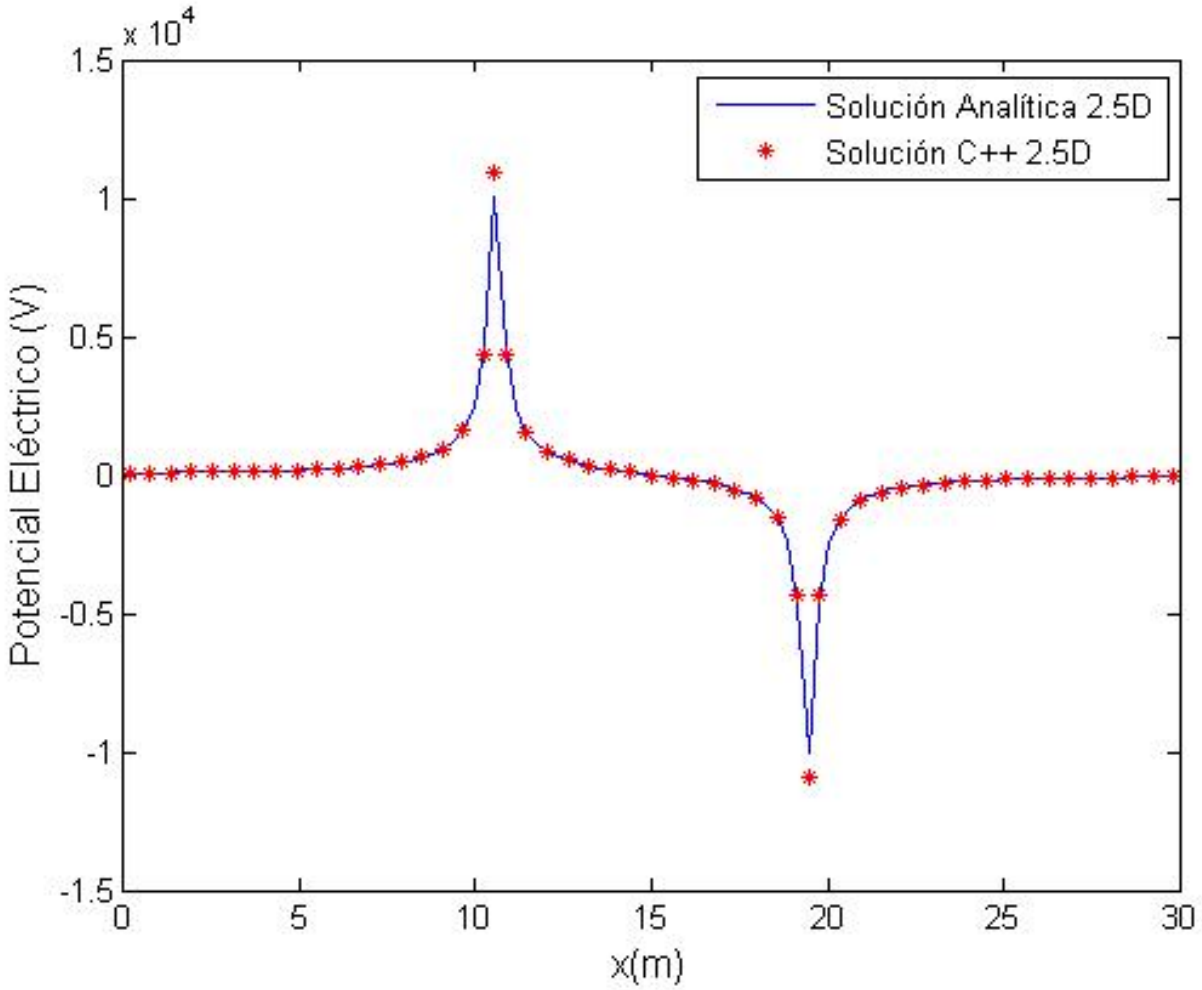


Figura 4.1.1: Potencial eléctrico homogéneo 3D: solución analítica 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (línea continua azul); solución numérica C++ 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (asteriscos rojos)

pasaría por incrementar la cantidad de números de onda utilizados para el cálculo de la solución 2.5D y mejorar así al mismo tiempo la inversión de Fourier, de modo que la solución invertida sea lo más similar posible a la solución real tridimensional. Esto supondría un incremento del coste computacional que no es asumible bajo ningún concepto, por lo que se debe buscar otra solución al problema presentado.

Sin embargo, si se observa la Figura (2.1.3), es posible comprobar que los puntos en los que se mide el potencial para generar la diferencia de potencial necesaria a la hora de reconstruir la distribución de resistividad aparente (ver Ecuación (2.6)) son aquellos donde se colocan los electrodos de potencial M y N. Estos puntos se sitúan ambos en una posición interior a los dos electrodos de inyección/recepción localizados en las posiciones A y B. Por ello, es posible concluir que, dado que en todos los puntos del dominio (incluidos M y N) el ajuste de las soluciones mostradas en la Figura (4.1.2) es adecuado, este problema no afectará a la definición de la distribución de resistividad aparente y por

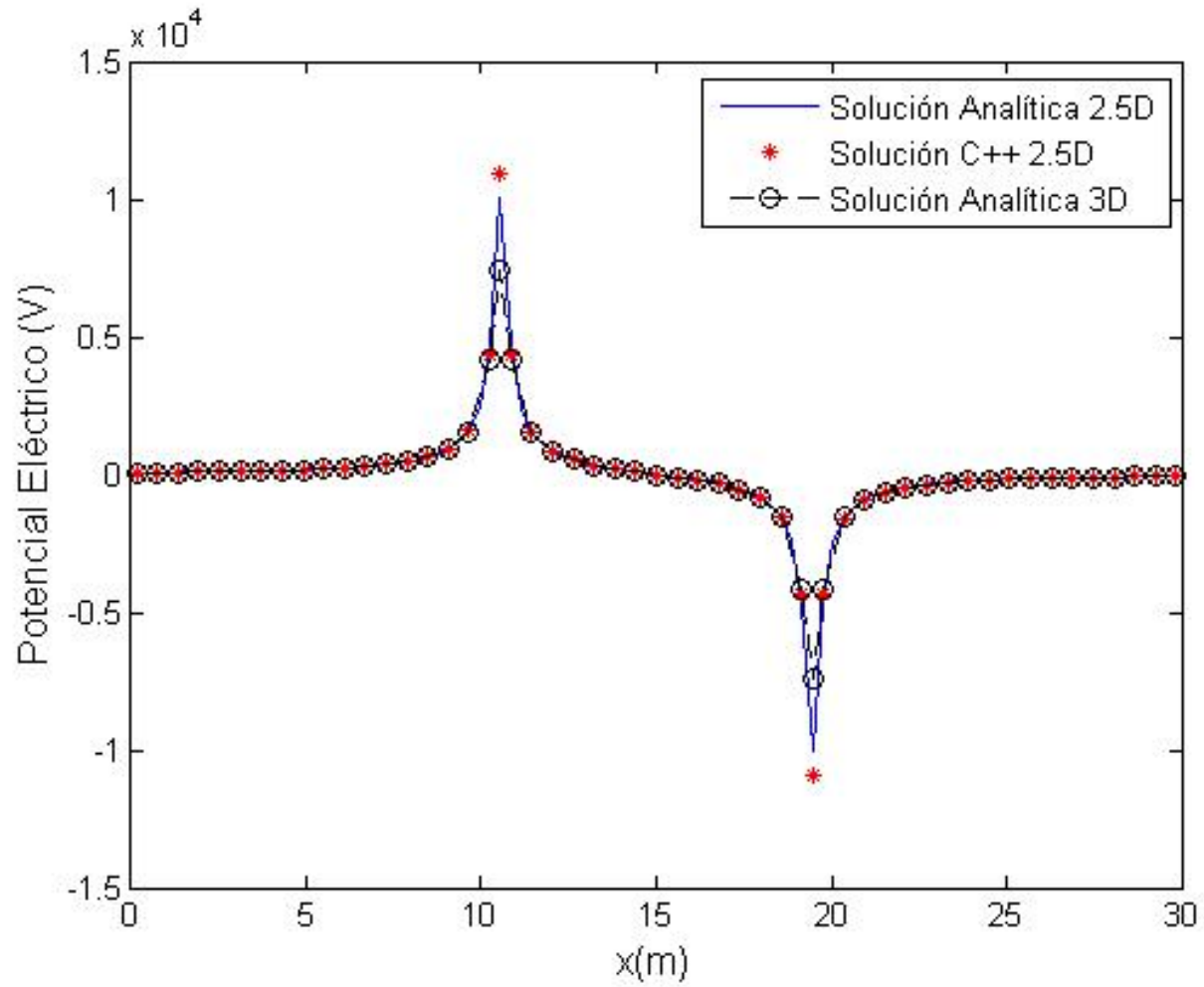


Figura 4.1.2: Potencial eléctrico homogéneo 3D: solución analítica 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (línea continua azul); solución numérica C++ 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (asteriscos rojos); solución analítica 3D (círculos negros)

ende tampoco lo hará con la distribución de resistividad real del subsuelo, que sería el objetivo de este modelo.

Con este mismo razonamiento se podría solucionar el problema de la singularidad en los puntos de inyección, aunque en este caso se incurriría en un error mayor al aplicar la transformación inversa de Fourier. Esto quiere decir que, si existe un error determinado en el valor del potencial eléctrico en el punto de inyección/recepción y este error se arrastra sin eliminarse hasta la aplicación de la transformación de Fourier, esto podría suponer un error aún mayor que incluso podría llegar a afectar a los valores de potencial eléctrico en posiciones aledañas, no sólo al potencial eléctrico en el punto de inyección. Por ello la aplicación del método desarrollado en la sección B para la eliminación de la singularidad puede resultar adecuada a la hora de disminuir el error acumulado.

En la Tabla (4.1.1) se muestran los parámetros utilizados en el cálculo de las soluciones para el potencial eléctrico presentadas en esta sección.

4.1.2. Inyección de Corriente Eléctrica en un Dominio Heterogéneo

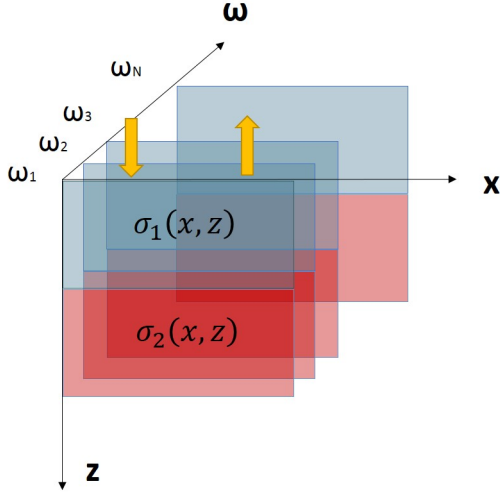


Figura 4.1.3: Geometría del dominio heterogéneo utilizado en la sección 4.1.2

Este caso se desarrollará principalmente para resolver el problema que aparece en el punto de inyección/recepción en cuanto a la singularidad del potencial eléctrico. Para ello, se generará un dominio heterogéneo formado por dos capas horizontales de un espesor variable y una conductividad eléctrica dada para cada una de las capas. De la misma forma que para el caso homogéneo, se colocarán dos fuentes de corriente eléctrica en la superficie terrestre y se graficará la variación de potencial eléctrico a lo largo del eje x en la superficie terrestre.

Para la geometría mostrada en la Figura (4.1.2) no se ha presentado ninguna solución analítica para el campo de potencial eléctrico durante el desarrollo del trabajo. Con el objetivo de poder verificar la solución numérica para este caso, se obtendrá en primer lugar una expresión analítica en el dominio de Fourier, basada en la ecuación 3D correspondiente [Telford *et al.*, 1990]. A esta ecuación le será aplicada la transformación inversa de Fourier definida en la sección 3.9

y se comparará con la solución procedente del código C++ así como con la solución analítica 3D.

Mediante el uso del método de las imágenes, [Telford *et al.*, 1990] presenta la solución analítica 3D para el valor del potencial eléctrico en la superficie de un dominio formado por dos capas horizontales con diferentes conductividad

Tabla 4.1.1: Parámetros para el cálculo de las soluciones presentadas en la sección 4.1

Parámetros	Caso Homogéneo	Caso Heterogéneo
Longitud del dominio (L_x [m])	30 [m]	30 [m]
Profundidad del dominio (L_z [m])	30 [m]	30 [m]
Intensidad de la fuente (I [A])	10 [A]	10 [A]
Conductividad eléctrica del dominio (σ [Sm^{-1}])	$1 \cdot 10^{-3}$ [Sm^{-1}]	$\sigma_{sup} = 1 \cdot 10^{-3}$ [Sm^{-1}] $\sigma_{inf} = 1 \cdot 10^{-1}$ [Sm^{-1}]
Espesor de las capas (e [%])	Dominio continuo	$e_{sup} = 30$ [%]/ $e_{inf} = 70$ [%]
Número de celdas por dimensión ($N_x/N_y/N_z$ [celdas])	101/101/101 [celdas]	101/101/101 [celdas]
Posición de las fuentes (F_1/F_2 [m])	10.5 [m]/19.5 [m]	10.5 [m]/19.5 [m]
Números de onda (ω [m^{-1}])	[Xu <i>et al.</i> , 2000]	[Xu <i>et al.</i> , 2000]
Pesos de Fourier (g [adim.])	[Xu <i>et al.</i> , 2000]	[Xu <i>et al.</i> , 2000]

eléctricas en cada una de ellas:

$$\phi_P = \frac{I}{2\pi r \sigma_{sup}} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^m}{[1 + (2me_{sup}/r)^2]^{1/2}} \right\} \quad (4.1)$$

Donde σ_{sup} es la conductividad eléctrica de la capa más cercana a la superficie terrestre, e_{sup} es el espesor de dicha capa, r es la distancia desde la fuente de inyección de corriente eléctrica hasta el punto P donde se mide el potencial eléctrico y k es el coeficiente de reflexión de la corriente eléctrica de la interfase entre capas. Este coeficiente se puede calcular mediante la imposición de continuidad en dicha interfase:

$$k = \left| \frac{\sigma_{sup} - \sigma_{inf}}{\sigma_{inf} + \sigma_{sup}} \right| < 1 \quad (4.2)$$

La idea de este método es que conforme aumenta el número de fuentes-imagen colocadas, una mayor cantidad de

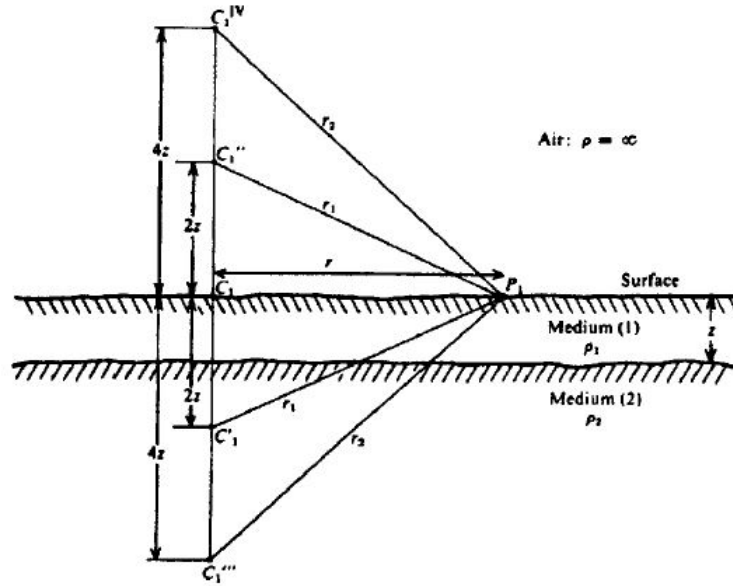


Figura 4.1.4: Método de las imágenes utilizado para obtener el valor del potencial eléctrico en un punto (P) de la superficie (Telford et al. [1990]).

potencial eléctrico es “reflejado” entre la interfase de ambas capas, por lo que el potencial eléctrico aumenta en la superficie (ver Figura(4.1.4)). En la Ecuación (4.1), es posible diferenciar dos términos, uno procedente directamente de la inyección de corriente eléctrica desde la superficie ($1/r$), y otro procedente de la reflexión en la interfase de las capas horizontales inferiores (la serie infinita de términos), término que produce el aumento de potencial en la superficie por reflexión.

Utilizando de nuevo el método de las imágenes, esta vez para calcular la expresión analítica del potencial eléctrico superficial en 2.5D en un dominio igualmente formado por dos capas horizontales con espesor variable y diferentes

conductividades eléctricas en cada una de ellas, el resultado es el siguiente:

$$\bar{\phi}_P = \frac{I}{2\pi\sigma_{sup}} \left[\mathcal{K}_0(\omega r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} k^m \mathcal{K}_0(\omega r_m) \right] \quad (4.3)$$

Donde r_m se define como $r_m = \sqrt{r^2 + (2me_{sup})^2}$, siendo r la distancia desde el punto de inyección hasta el punto P.

La forma de proceder a presentar las validaciones del modelo será similar a la del caso homogéneo. En primer lugar, se pasará a presentar las soluciones 2.5D, analítica y del código C++, aplicando después la transformada inversa de Fourier, para comprobar qué efecto tiene el método de eliminación de la singularidad en comparación con la solución estándar. A continuación se mostrará la comparación entre las soluciones anteriores y la solución analítica 3D para el potencial eléctrico.

En la Figura (4.1.5) se puede observar que el potencial eléctrico calculado mediante el código C++ de forma estándar sigue presentando un error debido a la singularidad que aparece en el problema de inyección. Sin embargo, es posible comprobar que la solución para el potencial eléctrico aplicando el método de eliminación de la singularidad al código C++ permite eliminar dicho problema, haciendo completo el ajuste de ambas soluciones. De esta forma, se puede establecer que queda eliminado el problema de la singularidad en los puntos de inyección/recepción para dominios en los que la conductividad eléctrica no es constante, que, en general, es la situación más común existente en la naturaleza.

Para comprobar cuál es el ajuste de la solución anterior con la solución tridimensional, se presentará en la Figura(4.1.6) la comparación entre ambas soluciones. En esta figura es posible observar que sigue existiendo diferencia entre la solución analítica 3D y la solución 2.5D (cualquiera de ellas) tras aplicar la transformación de Fourier. Como ya se explicó en la sección 4.1.1, este error no supone un problema a la hora de obtener la distribución de resistividad del subsuelo, por lo que no se le prestará mayor atención en adelante.

En la Tabla (4.1.1) se muestran los parámetros utilizados para obtener las soluciones presentadas en esta sección.

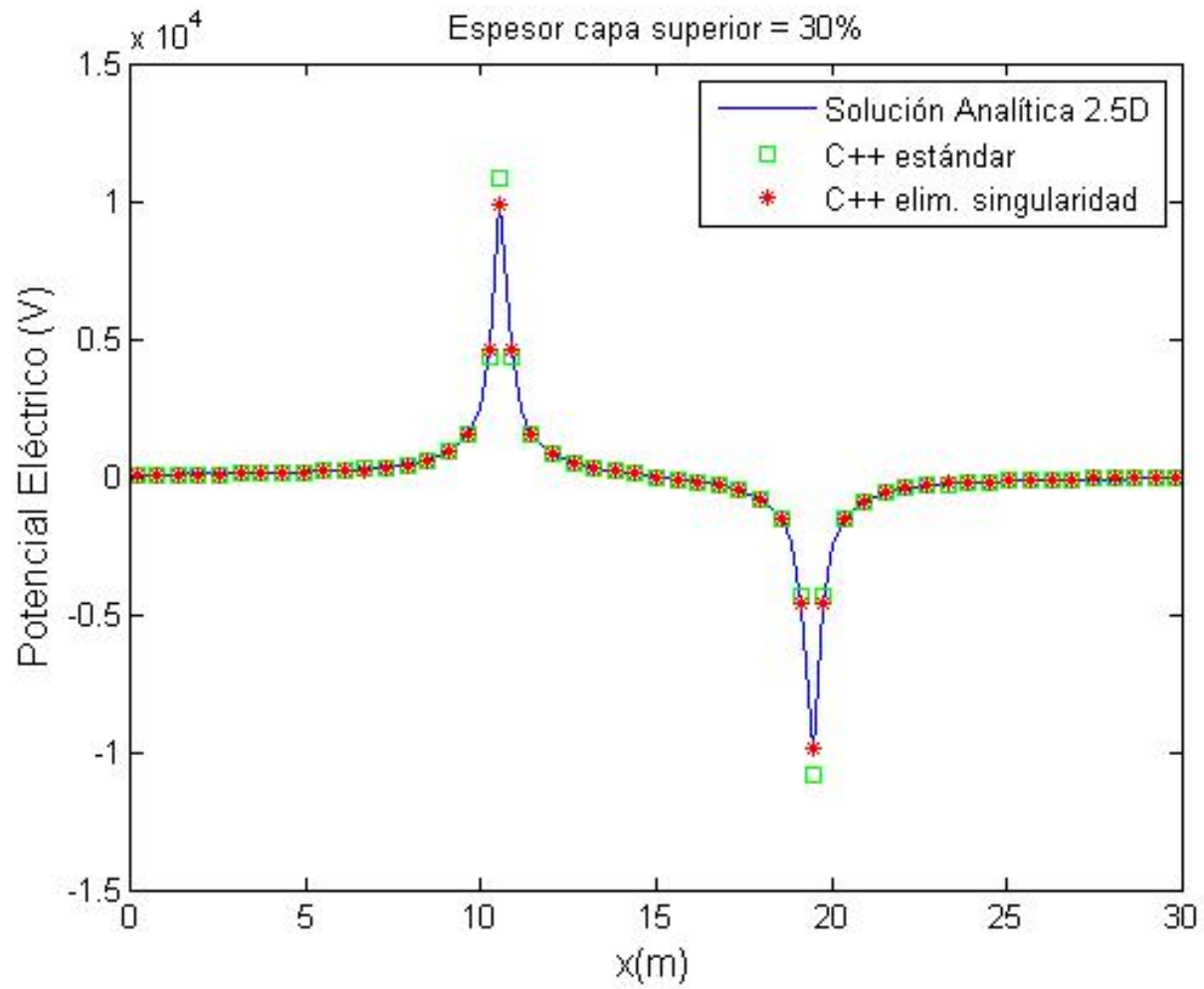


Figura 4.1.5: Potencial eléctrico heterogéneo 3D: solución analítica 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (línea continua azul); solución numérica C++ 2.5D estándar tras aplicar la transformación inversa de Fourier (cuadrados verdes); solución numérica C++ 2.5D con eliminación de la singularidad tras aplicar la transformación inversa de Fourier (asteriscos rojos)

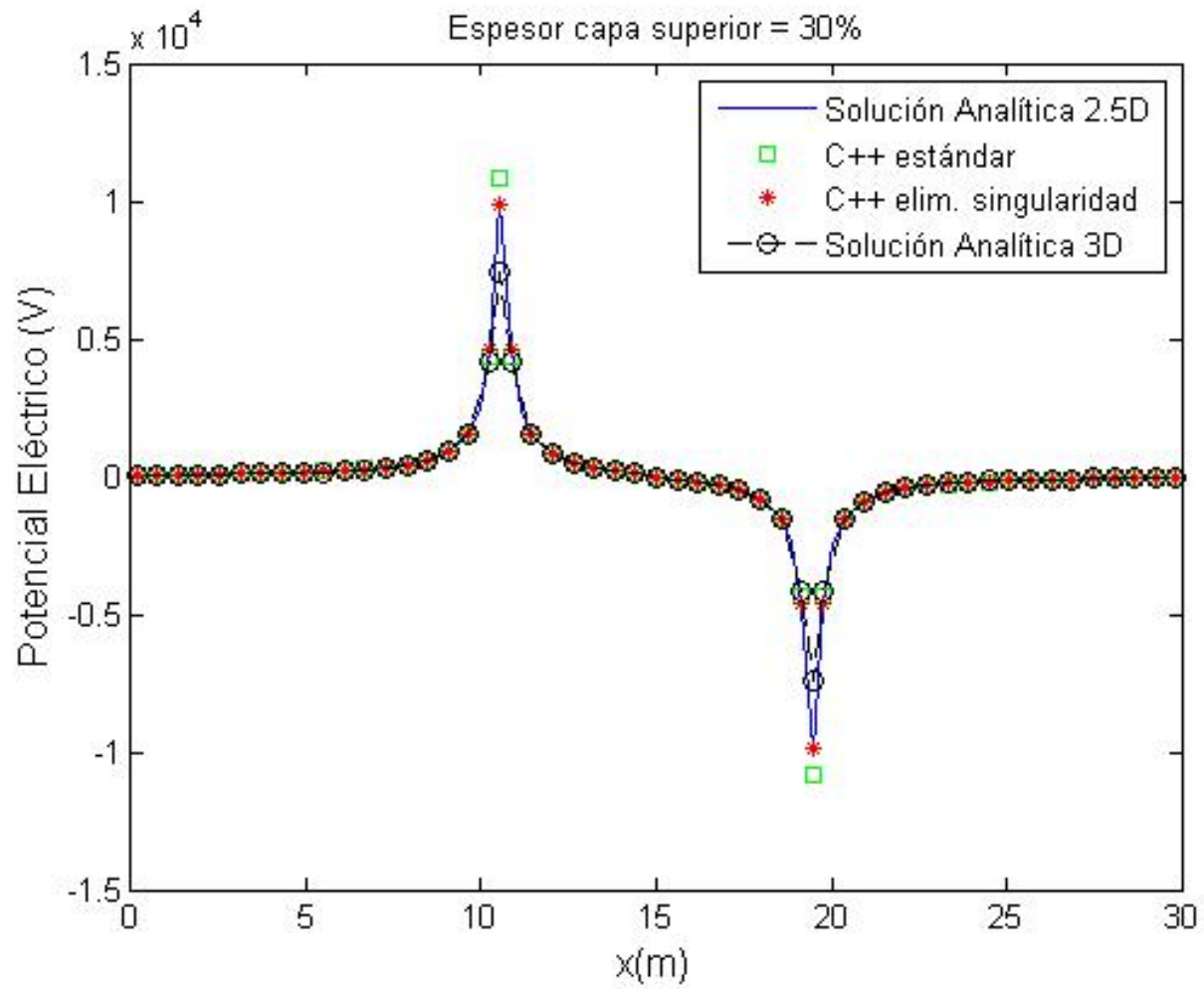


Figura 4.1.6: Potencial eléctrico heterogéneo 3D: solución analítica 2.5D tras aplicar la transformación inversa de Fourier (línea continua azul); solución numérica C++ 2.5D estándar tras aplicar la transformación inversa de Fourier (cuadrados verdes); solución numérica C++ 2.5D con eliminación de la singularidad tras aplicar la transformación inversa de Fourier (asteriscos rojos); solución analítica 3D (círculos negros)

4.1.3. Caso Gradiente

En las secciones anteriores se han presentado las validaciones correspondientes a la parte de la matriz. Sin embargo, hasta ahora no se ha validado en ningún caso el modelo DDP en el que se tendrán en cuenta las fracturas existentes en el subsuelo. Una vez validada esta situación que se expone a continuación, se podrá pasar a la presentación de los resultados del modelo DDP desarrollado con anterioridad.

El problema que se va a plantear a continuación ya fue descrito en 2D [Roubinet and Irving, 2014], donde se forzaba un gradiente lineal entre las fronteras izquierda y derecha del dominio de estudio, el cual presentaba una serie de fracturas paralelas a la superficie terrestre (ver Figura (7(a))). Además, se supone que no existe circulación de flujo de corriente eléctrica a través de las fronteras inferior y superior (condiciones Neumann). Bajo estas condiciones, no se debe esperar ningún tipo de intercambio de flujo de corriente eléctrica entre fracturas y matriz, puesto que no hay flujo circulando en dirección vertical y, por tanto, no se transfiere corriente eléctrica entre ambas. [Roubinet and Irving, 2014] calculan una conductividad equivalente, que depende de las aperturas y conductividades eléctricas de fracturas y matriz, para validar el nuevo modelo DDP creado. Puesto que esta conductividad equivalente no se ve afectada por el hecho de haber aplicado la aproximación 2.5D y por tanto, no variará su definición, en este proyecto se utilizará otro valor como medio de validación del modelo DDP, que se basará simplemente en la comparación del campo de potencial eléctrico que aparece en el dominio de estudio con una solución analítica del mismo bajo las condiciones representadas en la Figura (4.1.7).

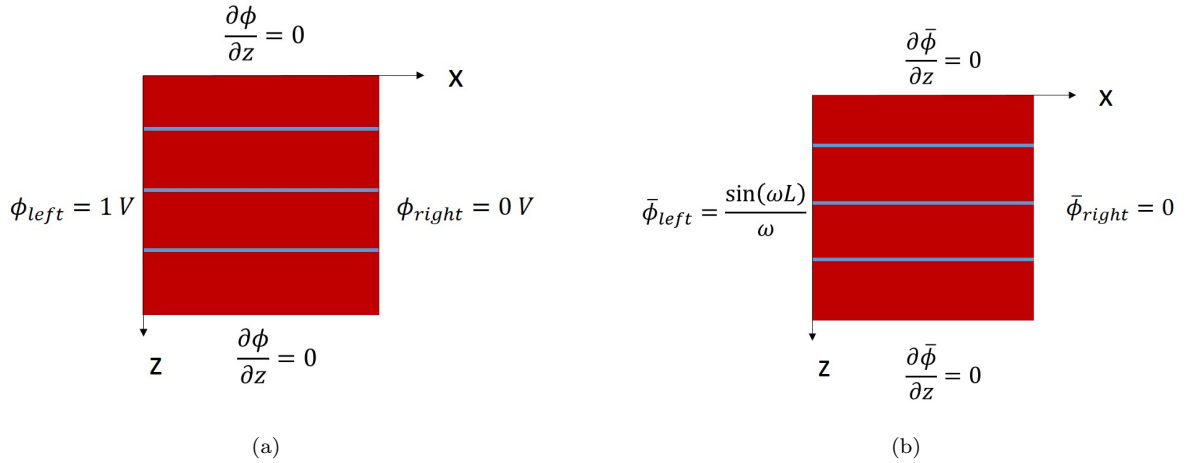


Figura 4.1.7: Geometría del caso gradiente planteado en la sección 4.1.3 para la validación del modelo DDP: (a) Situación 2D; (b) situación 2.5D

La generación del mismo caso utilizado en [Roubinet and Irving, 2014] para el problema 2.5D incluye dos consideraciones a tener en cuenta:

1. Las condiciones de contorno a imponer en las fronteras izquierda y derecha no pueden ser las mismas, puesto que la superposición de cada uno de los planos del dominio 2.5D deben dar lugar, tras la aplicación de la transformación inversa de Fourier, al problema 3D (en este caso, nos restringimos al dominio 2D). Es por esto

que es necesario aplicar la transformada de Fourier definida en la Ecuación (2.12) a las condiciones de contorno bidimensionales. Para ello, se debe considerar que las condiciones de contorno de las fronteras en cuestión se pueden representar como una función que toma el valor 1 hasta un punto concreto ($a = L$) y después su valor es siempre 0:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < L_x \\ 0 & L_x < x < \infty \end{cases} \quad (4.4)$$

Utilizando esta definición de las condiciones de contorno en 2D, es posible calcular las mismas condiciones en el dominio de Fourier [Bateman, 1954], que serán las utilizadas en esta sección (ver Figura(7(b))):

$$f(x) \xrightarrow{\text{Transformada}} \mathcal{F}(\omega) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega L_x)}{\omega} & 0 < x < L \\ 0 & L_x < x < \infty \end{cases} \quad (4.5)$$

2. Debido a la dependencia con el número de onda de las nuevas condiciones de contorno en el dominio de Fourier, el gradiente entre las fronteras derecha e izquierda deja de ser lineal, y pasa a ser un gradiente exponencial. Para conseguir la expresión de dicho gradiente exponencial, es necesario resolver la ecuación de conservación de la carga.

Puesto que, como se explicó al comienzo de la sección, en esta situación no se produce intercambio de flujo de corriente eléctrica entre matriz y fractura ($\alpha_{fm}^{IJ} = 0$), es posible considerar que la aplicación de la ecuación de conservación de la carga puede restringirse a un dominio unidimensional, dado que no existe flujo en la dirección vertical. Esta consideración da lugar a que no exista diferencia entre la variación de potencial eléctrico en la matriz y en la fractura a lo largo del eje horizontal, aún teniendo éstas diferentes conductividades eléctricas.

Teniendo esto en cuenta, la solución analítica para el caso gradiente en 2.5D viene dada por la siguiente expresión:

$$\bar{\phi}_{1D}(x, \omega) = \frac{\sin(\omega L)}{\omega (1 - \exp(2\omega L))} (\exp(\omega x) - \exp(2\omega L) \exp(-\omega x)) \quad (4.6)$$

Expresión ésta válida tanto para las fracturas como para la matriz.

Es importante notar que en esta situación no se pueden utilizar los coeficientes optimizados de Fourier presentados por [Xu *et al.*, 2000], puesto que, como se explico en la sección 3.9, se requiere la presencia de un punto de inyección en la superficie, y en este caso no existe tal inyección. Por ello, se necesitaría seguir el método estándar de inversión de Fourier para llegar a una aproximación adecuada a la solución 3D. Sin embargo, como este caso no tiene validez real, sino que simplemente sirve para comprobar que el modelo DDP desarrollado hasta ahora tiene sentido físico y permite tener en cuenta las fracturas presentes en el subsuelo, se presentará únicamente una comparación del campo de potencial eléctrico en 2.5D, sin llegar a aplicar la transformación de Fourier, puesto que este paso sólo sería necesario en caso de querer comprobar la validez de dicha inversión, cuya efectividad ya quedó patente en las secciones 4.1.1 y 4.1.2.

Por lo tanto, la idea de este caso es demostrar que el modelo propuesto es capaz de calcular el potencial eléctrico en el dominio de Fourier para una situación en la que no hay intercambio de flujo de corriente eléctrica. Esta ausencia de intercambio de flujo no se fuerza en el código C++, sino que es el propio código el que debe proporcionar valores

idénticos en matriz y fracturas para que el intercambio no se produzca. Esta es la razón por la cual se desea evaluar este caso particular, puesto que, además, se cuenta con la solución analítica del potencial eléctrico para esta situación concreta, descrita en la Ecuación (4.6).

En la Figura (4.1.8), se muestra la solución analítica 2.5D junto con las soluciones para el potencial eléctrico en 2.5D para matriz y fractura por separado, procedentes del código C++. Se esperaría obtener el mismo valor para el potencial eléctrico de matriz y fractura dada la ausencia de intercambio de flujo de corriente eléctrica entre ambas estructuras. Además, como se ha mencionado anteriormente y se observa en la Ecuación (4.6), la solución no dependerá de las conductividades eléctricas de fracturas y matriz, por lo que dichos valores no serán relevantes en este caso.

Como no se aplicará la transformación inversa de Fourier a los resultados presentados a continuación, se han seleccionado aleatoriamente diferentes números de onda para los que se ha resuelto el problema, con objeto de corroborar que se mantienen las consideraciones anteriormente establecidas para todos ellos.

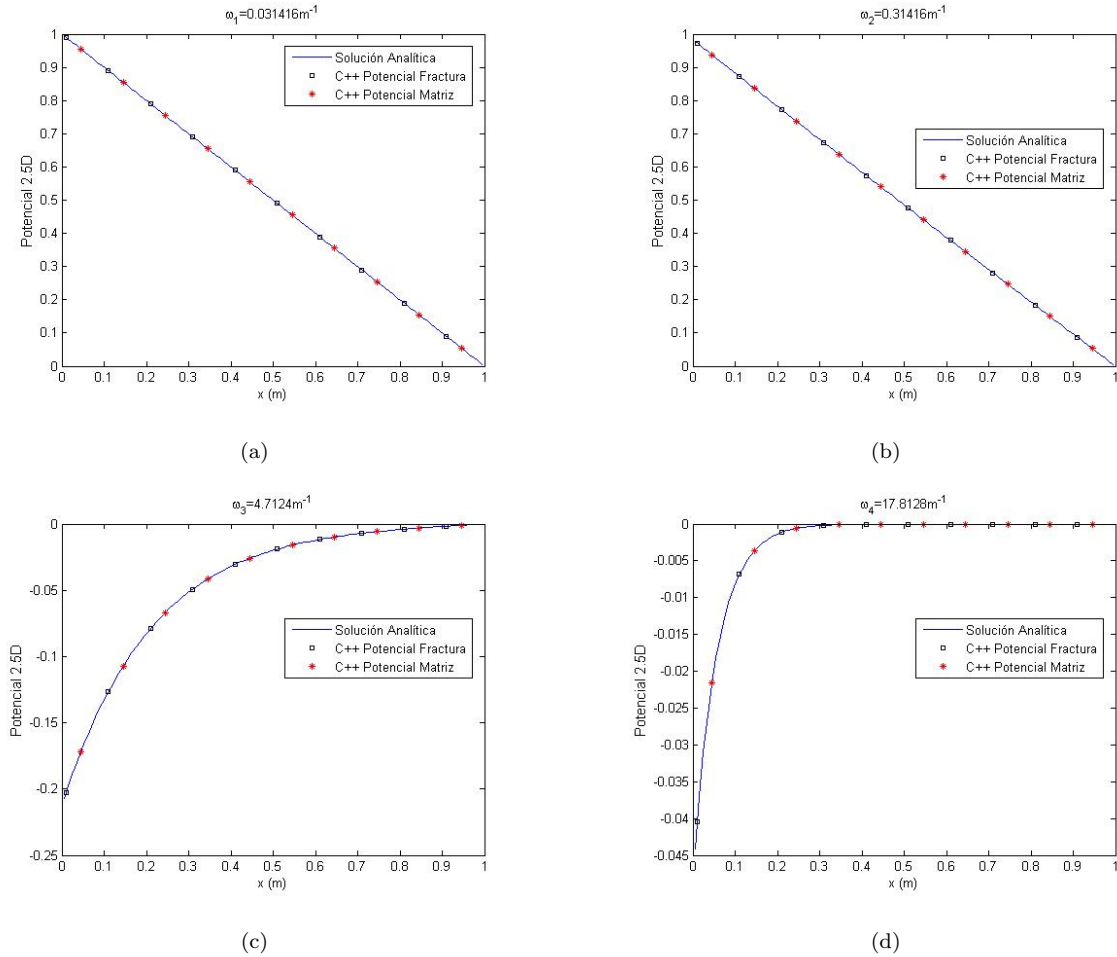


Figura 4.1.8: Potencial 2.5D para distintos números de onda: solución analítica 2.5D para el caso gradiente (Ecuación (4.6)) (Línea continua azul); solución C++ para el potencial eléctrico de la fractura (cuadrado negros); solución C++ para el potencial eléctrico de la matriz (asteriscos rojos)

En la Figura (4.1.8) se puede apreciar que el potencial eléctrico a lo largo del eje horizontal es el mismo para matriz y fractura, por lo que se puede decir que no existe intercambio de flujo de corriente eléctrica entre ambas estructuras. Además, la solución analítica para este caso coincide plenamente con las dos soluciones anteriores, por lo que se puede concluir que el modelo DDP recoge de una forma adecuada el comportamiento del potencial eléctrico ante las fracturas presentes en el subsuelo.

En la Tabla (4.1.2) se muestran los parámetros utilizados para el cálculo de las soluciones presentadas en la sección 4.1.3.

Tabla 4.1.2: <i>Parámetros para el cálculo de las soluciones presentadas en la sección 4.1.3</i>	
Parámetros	Caso Gradiente
Longitud del dominio (L_x [m])	1 [m]
Profundidad del dominio (L_z [m])	1 [m]
Intensidad de la fuente (I [A])	10 [A]
Conductividad eléctrica de la matriz (σ_m [Sm^{-1}])	No afecta a la solución
Conductividad eléctrica de las fracturas (σ_f [Sm^{-1}])	No afecta a la solución
Número de celdas por dimensión ($N_x/N_y/N_z$ [celdas])	101/101 [celdas]
Posición de las fuentes (F_1/F_2 [m])	No existen
Números de onda (ω [m^{-1}])	$(\pi/100, \pi/10, 3\pi/2, 567\pi/100)$ [m^{-1}]

4.2. Resultados

Una vez validado el modelo DDP-2.5D planteado durante el desarrollo de este trabajo, se pasará a mostrar los resultados obtenidos en relación a la distribución de resistividad aparente. Este valor de resistividad aparente se podrá obtener a través de las medidas de diferencia de potencial obtenidas de los electrodos colocados en la superficie, siguiendo las pautas aportadas en la sección 2.1.2, en concreto mediante la Ecuación (2.6). Con este fin, se planteará de nuevo una división en la forma de mostrar los resultados que aparecerán a continuación, separando los referentes únicamente a la matriz, de los que incluyen fracturas en el dominio.

A diferencia de la sección anterior, en esta ocasión se presentarán diversas gráficas en las que se mostrarán los valores de resistividad aparente correspondientes a sucesivas distribuciones de la matriz de electrodos sobre la superficie terrestre. Esta idea permite obtener las mediciones de resistividad aparente del subsuelo a diferentes profundidades, hecho que se explica mediante la esfericidad de la solución de la ecuación de Poisson que rige el problema general, reflejada mediante las líneas equipotenciales presentes en la Figura (2.1.2), donde se puede ver que cuando se toman medidas de potencial desde puntos más alejados de la inyección de corriente eléctrica en el subsuelo, se simula la obtención de valores de potencial eléctrico correspondientes a profundidades mucho mayores. Esta es la principal ventaja del método ERT descrito en la sección 2.1, que permite obtener valores de resistividad aparente del subsuelo a grandes profundidades, lo que únicamente sería posible mediante otros tipos de métodos geofísicos de medida o excavaciones.

Esto se logra conseguir a base de incrementar la separación entre los puntos de inyección/recepción, lo que indirectamente supone una toma de medidas de diferencia de potencial más alejada de dichos puntos. Por lo tanto, los resultados presentados se basarán en la repetición de una serie de experimentos ERT sobre un dominio determinado en el que se irá paulatinamente incrementando la separación entre los electrodos, de forma que éstos siempre se encuentren centrados en el dominio de estudio. De esta forma lo que se consigue es crear una línea imaginaria vertical, centrada en el dominio, a lo largo de la cuál se irá recolectando el valor de resistividad aparente para cada profundidad (ver Figura(4.2.1)).

En los resultados mostrados a continuación hay un problema que aparecerá reiteradamente en todas las situaciones planteadas, y es el del tamaño de celda considerado para la discretización del modelo. El problema que entraña el tamaño de la celda es simple: bajo una discretización gruesa, es decir, con un tamaño de celda grande, la precisión de la posición en la que se encuentran los electrodos del problema es menor, de forma que, para las primeras mediciones, en las que los electrodos se situarán muy cercanos entre sí, puede ocurrir que la posición sea la misma para diferentes electrodos, es decir, podría ocurrir, y de hecho ocurre, que el electrodo M esté colocado en la misma celda que el electrodo N, generando de ese modo una medida de diferencia de potencial nula. Este problema supondrá valores nulos o incorrectos para la distribución de resistividad aparente en el subsuelo en aquellos puntos en los que ocurra esto. La solución ante este problema sería el refinamiento de la malla de computación, que supondría un aumento del coste computacional invertido en resolver el problema. Por lo tanto, se considerará un tamaño de celda que permita una buena precisión en la medida de resistividad aparente para valores del espaciamiento entre electrodos suficientemente coherentes con los valores de medida reales utilizados en los experimentos de campo.

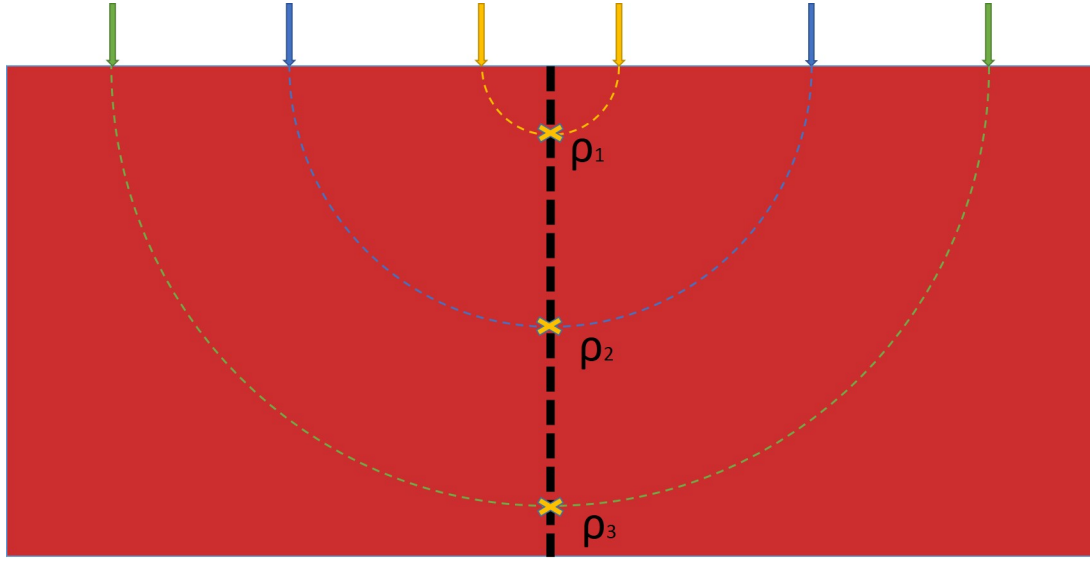


Figura 4.2.1: Situación analizada para el cálculo de la resistividad aparente de las diferentes situaciones presentadas en la sección 4.2

A continuación se mostrarán los resultados a través de la misma división planteada en la sección 4.1. En primer lugar, se mostrarán los resultados referentes a la parte de la matriz (sección 4.2.1), en segundo lugar se presentarán los resultados del modelo DDP planteado en el desarrollo de este trabajo (sección 4.2.2), y para terminar, se hará referencia brevemente a unos resultados relacionados con la dificultad que entraña el problema de inversión de la distribución de resistividad aparente para obtener el campo de resistividad real del subsuelo (sección 4.2.3).

4.2.1. Resultados *Equivalent Porous Media*(EPM)

En este caso se mostrarán los resultados obtenidos para la distribución de resistividad aparente conforme a la línea vertical presentada en la Figura (4.2.1). En concreto, se presentan dos situaciones a resolver: (a) dominio homogéneo con conductividad eléctrica $\sigma \equiv \text{constante}$ y (b) dominio heterogéneo formado por dos capas horizontales en el subsuelo, con conductividades eléctricas σ_{sup} y σ_{inf} para las capas superior e inferior respectivamente.

Ambas situaciones son las presentadas en las secciones 4.1.1 y 4.1.2, pero en esta ocasión se valorará la capacidad del modelo de reproducir la resistividad aparente a partir del potencial eléctrico medido en la superficie terrestre.

(a) *Caso Homogéneo:*

En estas condiciones, las medidas de resistividad aparente deberían ser exactamente las mismas para cualquier profundidad e iguales a la resistividad real del dominio, que se define como la inversa de la conductividad eléctrica, puesto que el dominio es homogéneo. Esto se traduciría en que, independientemente del valor de separación entre electrodos, la medida de resistividad aparente será siempre la misma.

Para comprobar que ésto se cumple, se presenta a continuación una gráfica en la que se muestra el valor de la

resistividad aparente en función de la separación entre electrodos. Además, se comparará la solución obtenida mediante el código C++ con la obtenida utilizando la solución analítica para este caso, aunque la única razón para hacer esto es la de comparar la precisión de ambas, puesto que ya se comprobó que los valores de potencial eléctrico eran idénticos, y la obtención de la medida de resistividad aparente únicamente implica la aplicación de determinados coeficientes (ver Ecuación (2.6)).

Con la intención de valorar en qué niveles de error se encontrarían los resultados mostrados, se graficará también el error relativo del valor de resistividad aparente en referencia al valor esperado (el valor inverso de la conductividad eléctrica constante del dominio), según la expresión:

$$\varepsilon_{rel}(\%) = \left| \frac{\rho - \rho_a}{\rho} \right| \cdot 100 \quad (4.7)$$

Donde ρ es el valor esperado de resistividad eléctrica del terreno homogéneo, definido como $\rho = 1/\sigma$.

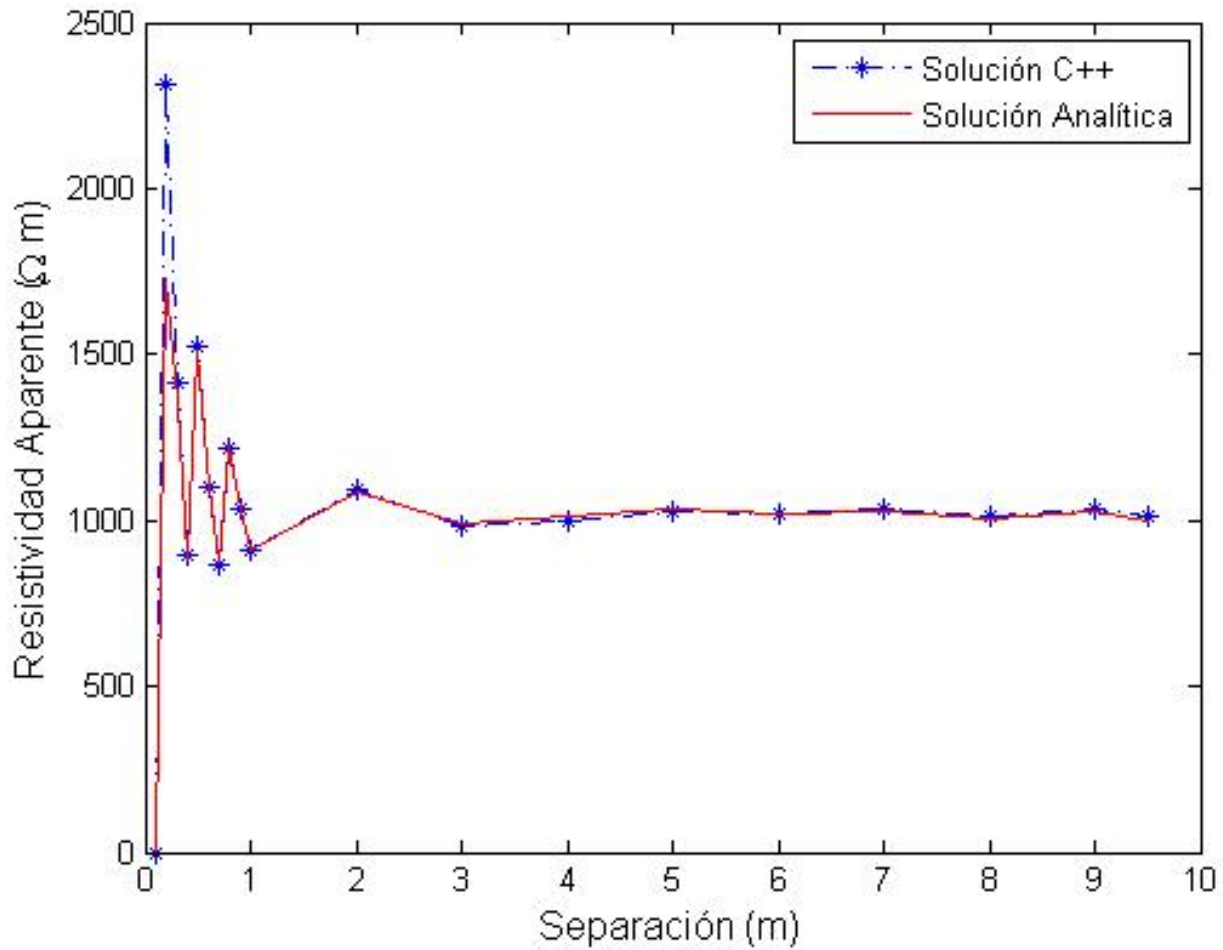


Figura 4.2.2: Resistividad aparente para diferentes separaciones de la matriz de electrodos en un dominio homogéneo con conductividad eléctrica $\sigma = 1 \cdot 10^{-3} \text{ (Sm}^{-1}\text{)}$

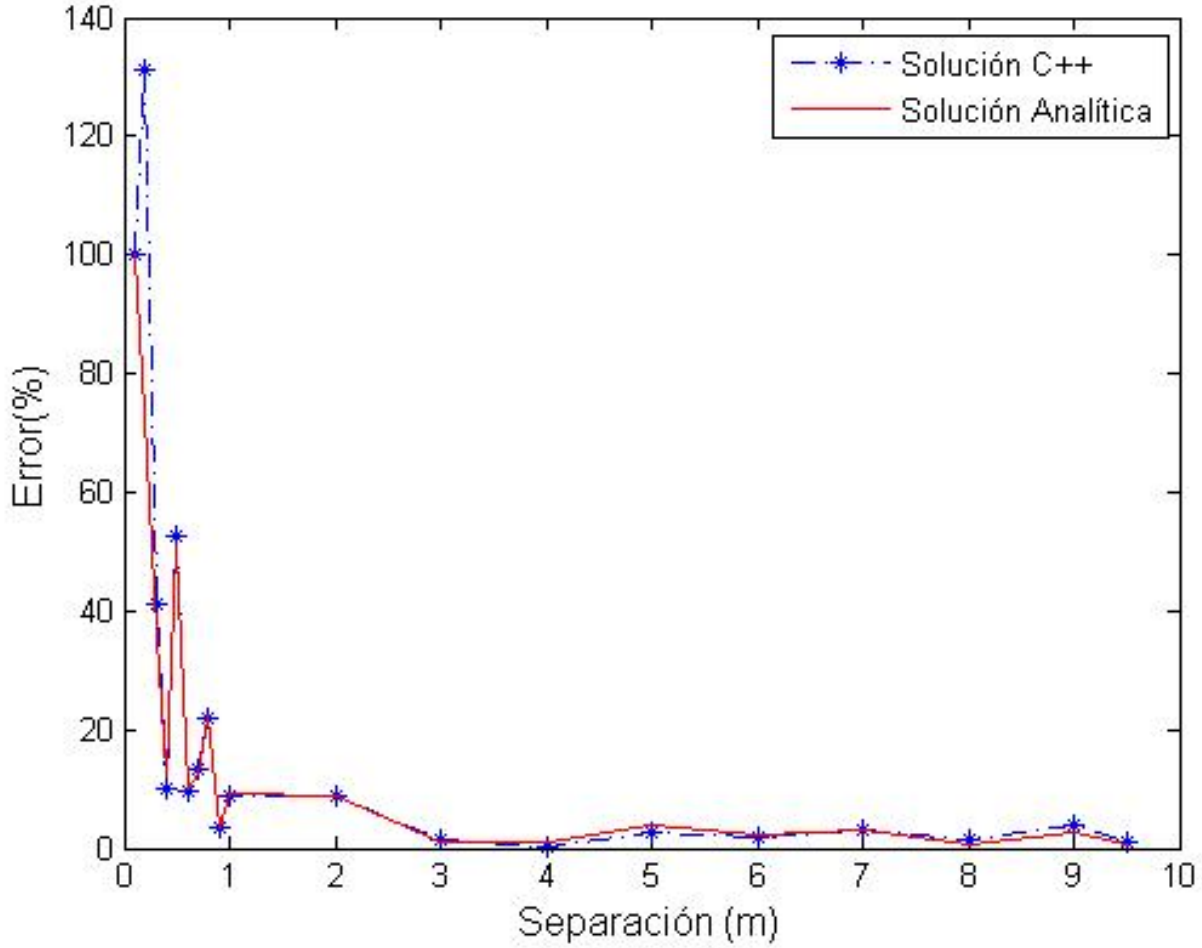


Figura 4.2.3: Error cometido en el cálculo de la resistividad aparente en el dominio homogéneo con respecto al valor esperado, calculado según la Ecuación (4.7)

En la Figura (4.2.2) se observa cómo el valor de la resistividad aparente calculada mediante el modelo desarrollado en el trabajo tiende a equilibrarse en el valor esperado ($1/\sigma = \rho = 1000 \Omega m$) cuando el espaciamiento entre electrodos es de al menos 3 metros de distancia. Por lo tanto, es posible asegurar que, a partir de 3 metros de espaciamiento, la distancia entre las celdas que contienen la posición de los electros es suficiente como para que no exista un solapamiento en el cálculo de la diferencia de potencial eléctrico entre ambas.

Los valores estándar de separación mínima entre electrodos para una matriz Wenner de distribución de los electrodos sobre la superficie oscilan entre 1 y 3 metros (e.g. *ABEM* [2007], *Robert* [2012]), por lo que el modelo DDP propuesto no es capaz de obtener una solución adecuada para estas separaciones de los electrodos. Como estos valores son mínimos, se puede considerar que los resultados proporcionan una buena solución ante separaciones superiores a 3 metros, valores éstos utilizados en los experimentos de campo reales.

El problema que se observa para los primeros valores de separación entre los electrodos es el comentado anteriormente fruto de la coincidencia de celdas para los electrodos M y N, o en su defecto, la escasez de suficiente distancia entre dichos electrodos y los electrodos de intensidad que inyectan la corriente al subsuelo, que puede afectar al valor de resistividad aparente debido a la resistencia de contacto creada entre el material del electrodo y el propio mineral del subsuelo en el que se enclavaría dicho electrodo. Cuando esta distancia es inferior a unos 50 centímetros (e.g. *Robert* [2012], *ABEM* [2007]), la resistividad medida puede resultar modificada por esta resistencia de contacto. Este problema, como ya se dijo, se solucionaría mediante un incremento del número de celdas en las que se divide el dominio, facilitando así la precisión a la hora de posicionar los electrodos y por tanto la mejora en las mediciones de potencial eléctrico.

En cuanto al error, es posible observar en la Figura (4.2.3) que los valores de error relativo existente en las mediciones de resistividad aparente son realmente bajos, principalmente considerando separaciones por encima de los 3 metros, por las razones antes explicadas. Puesto que incluso la solución analítica presenta errores en este aspecto, debidos del mismo modo a la discretización empleada, la conclusión que se podría extraer de ambas gráficas es que una vez superados los 3 metros de separación entre electrodos para esta discretización en particular (valores mostrados en Tabla (4.2.1), la fiabilidad de los resultados es muy elevada, presentando como error relativo máximo $\varepsilon_{max} = 3,75\%$.

(b) ***Caso Heterogéneo:***

Bajo estas condiciones, el dominio quedará dividido en dos capas horizontales, cada una de ellas con un espesor y una conductividad eléctrica diferentes (ver Figura (4.1.2)). En este caso, al no ser un dominio homogéneo, no existirá un valor constante de resistividad aparente, como en el caso anterior, sino que la resistividad aparente medida variará entre los valores de cada capa.

Lo que esto significa es que, en caso de que la capa superior sea muy estrecha, únicamente los primeros valores de resistividad aparente medidos (correspondientes a separaciones de los electrodos muy pequeñas) captarán la existencia de dicha capa, pues la mayoría del dominio estará compuesta por la inferior y más ancha capa. En el caso contrario, al ocupar la gran mayoría del dominio la capa superior, solamente los valores de resistividad aparente medidos para grandes separaciones de los electrodos recogerán la información de resistividad procedente de la capa inferior.

Con el objetivo de mostrar estos resultados, se planteará una situación con una relación de espesor determinada de las capas horizontales que conformarán el dominio. Concretamente, para valorar el caso límite, se tomará un valor de espesor extremo, reflejado junto con el valor adoptado para el resto de parámetros en la Tabla(4.2.1).

Como se observa en la Figura (4.2.4), aparece igualmente el problema relacionado con las separaciones pequeñas, explicado anteriormente. En este caso, no existe un valor esperado de resistividad, sino que se supone que ésta irá variando entre $\rho_{sup} = 1000 \Omega m$ y $\rho_{inf} = 1 \Omega m$, lo que se confirma en dicho gráfico. Se puede observar como, dado el pequeño espesor de la capa superior, conforme se comienzan a obtener medidas de resistividad aparente correspondientes a mayores profundidades, su valor comienza a disminuir hasta alcanzar el de la capa inferior.

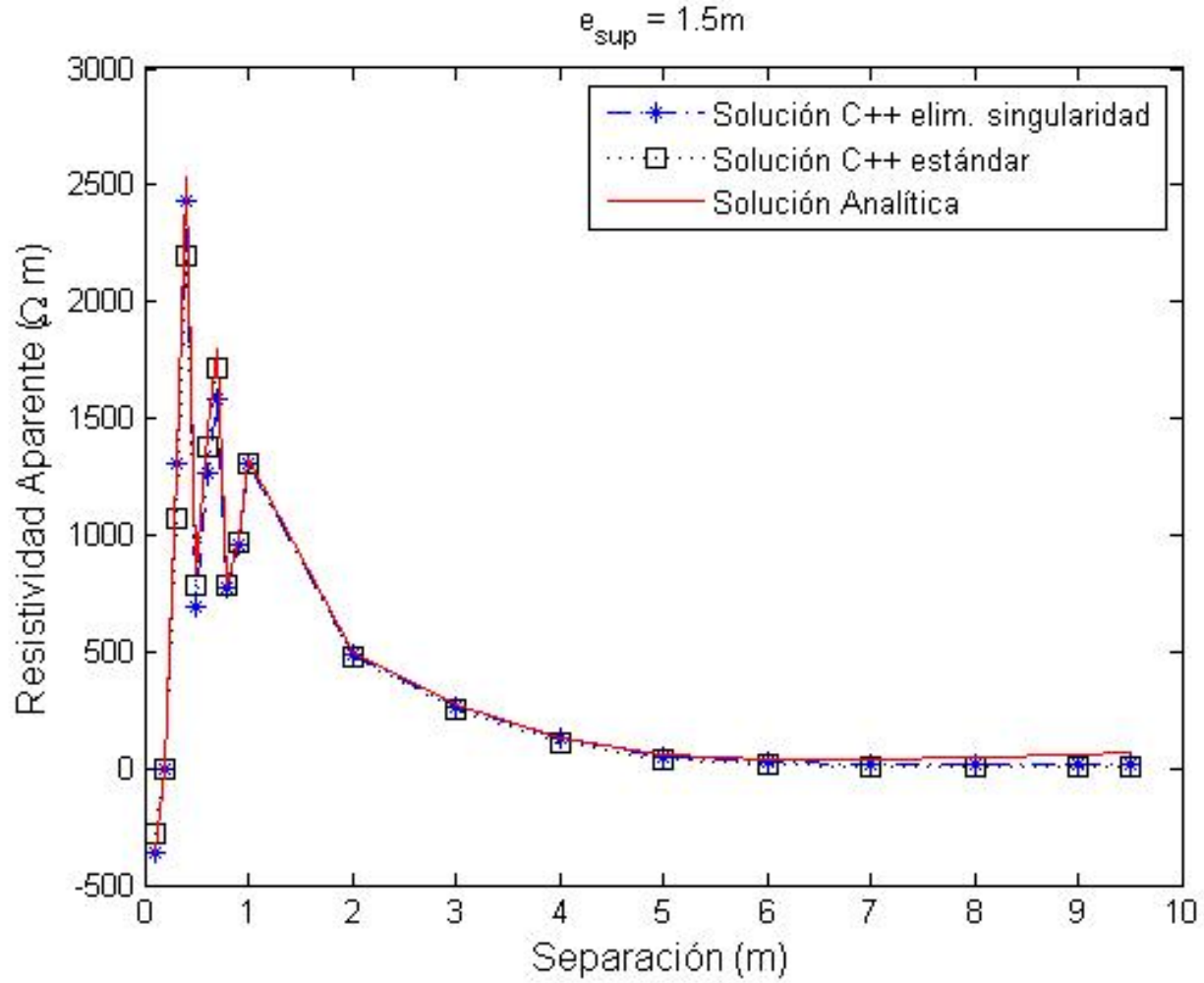


Figura 4.2.4: Resistividad aparente para un dominio heterogéneo formado por dos capas horizontales, con un espesor de la capa superior de $e_{sup} = 1,5 \text{ m}$ y unas conductividades eléctricas de valor $\sigma_{sup} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Sm}^{-1}$ y $\sigma_{inf} = 1 \cdot 10^{-1} \text{ Sm}^{-1}$

Además se ha añadido un extra a la comparación mostrada, que incluye la solución precedente del código C++ aplicando simultáneamente el método de eliminación de la singularidad desarrollado en este estudio. Utilizando este método, la solución es aún más coincidente con la analítica, aunque ya se explicó en la Figura (4.2.2) que incluso para la solución analítica existe un error causado por la discretización utilizada en la resolución del problema.

Aunque sólo se ha evaluado la efectividad del modelo EPM, es decir, incluyendo únicamente la parte que afecta a la matriz, sin ningún tipo de fracturas presentes en el subsuelo, se podría llegar a la conclusión de que dicho modelo permite simular situaciones reales que se dan en las mediciones de campo de resistividad aparente y además es capaz de reproducir las condiciones de resistividad eléctrica de las que partía, como se ha mostrado en las Figuras (4.2.2) y

(4.2.4).

Por lo tanto, los resultados obtenidos ponen de manifiesto la efectividad del modelo, aunque desde luego su aplicación a situaciones reales es prácticamente imposible, básicamente debido a la existencia mayoritaria de fracturas en la gran mayoría de sistemas geológicos. Es por ello que continuación se presentan los resultados más relevantes del estudio en cuestión, evaluando simultáneamente la roca madre que contiene las fracturas (matriz) junto con las propias fracturas. Estos resultados proporcionarán algo de luz sobre la aplicabilidad del modelo propuesto así como su efectividad en la detección y caracterización de fracturas.

Tabla 4.2.1: *Parámetros para el cálculo de las soluciones presentadas en la sección 4.2.1*

Parámetros	Caso Homogéneo	Caso Heterogéneo
Longitud del dominio (L_x [m])	30 [m]	30 [m]
Profundidad del dominio (L_z [m])	30 [m]	30 [m]
Intensidad de la fuente (I [A])	10 [A]	10 [A]
Conductividad eléctrica del dominio (σ [Sm^{-1}])	$1 \cdot 10^{-3}$ [Sm^{-1}]	$\sigma_{sup} = 1 \cdot 10^{-3}$ [Sm^{-1}] $\sigma_{inf} = 1 \cdot 10^{-1}$ [Sm^{-1}]
Espesor de las capas (e [%])	Dominio continuo	$e_{sup} = 5$ [%]/ $e_{inf} = 95$ [%]
Número de celdas por dimensión ($N_x/N_y/N_z$ [celdas])	101/101/101 [celdas]	101/101/101 [celdas]
Separación entre electrodos (s [m])	(0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9.5) [m]	
Posición de las fuentes (F_1/F_2 [m])	$L_x/2 - 3s/2$ [m]/ $F_1 + 3s$ [m]	$L_x/2 - 3s/2$ [m]/ $F_1 + 3s$ [m]
Números de onda (ω [m^{-1}])	[Xu et al., 2000]	[Xu et al., 2000]
Pesos de Fourier (g [adim.])	[Xu et al., 2000]	[Xu et al., 2000]

4.2.2. Resultados *Discrete-Dual Porosity* (DDP)

En esta ocasión, se plantearán tres geometrías diferentes en cuanto al posicionamiento de las fracturas en la matriz, tal y como se puede observar en la Figura (4.2.5). Para cada una de estas geometrías, se calculará, del mismo modo que en las secciones anteriores, el valor de la resistividad aparente a lo largo de una línea vertical que cruza el dominio por el centro del mismo. Como se explicó en la sección 4.2.1, el valor de la resistividad aparente calculado de esta forma cambiará en función de las estructuras que quedan por encima del punto donde se calcula dicha resistividad. Esto es debido a que el campo eléctrico se ve modificado por cada una de las estructuras que éste va atravesando en su avance hacia profundidades mayores, lo que afecta implícitamente al valor de la resistividad aparente. Dicho efecto se observa en la Figura (4.2.4), donde debido a la geometría bi-capa del dominio, la resistividad eléctrica cambia con la profundidad.

Cuando estas capas horizontales se consideran de un espesor muy pequeño en relación al tamaño del dominio estudiado, se podría decir que pasan a ser denominadas fracturas. Típicamente, la diferencia en hidrología entre la permeabilidad de matriz y fracturas puede llegar a ser de muchos órdenes de magnitud, hecho que corroboraría la

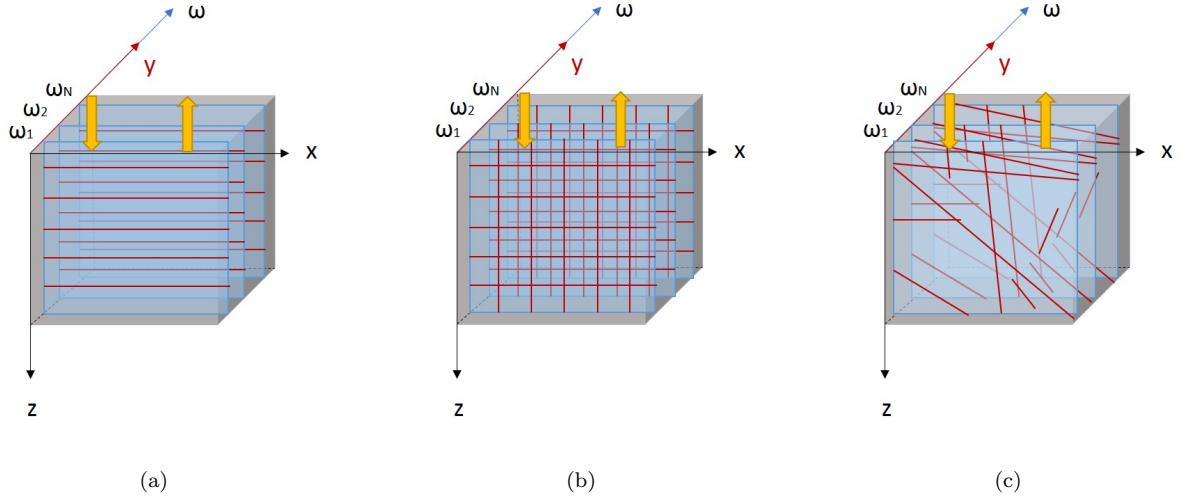


Figura 4.2.5: Geometrías utilizadas en la presentación de resultados: (a) caso de fracturas paralelas, (b) caso de “Sugar Box”, (c) Caso de fracturas aleatorias

existencia de caminos preferentes a través de los cuales circularía el fluido en cuestión, evitando entrar en la matriz rocosa. Sin embargo, en el estudio del flujo de corriente eléctrica en el subsuelo, las diferencias de conductividades eléctricas entre fracturas y matriz no son superiores a dos órdenes de magnitud [Roubinet and Irving, 2014], lo que favorece la circulación de flujo a través de matriz y fracturas, y no únicamente a través de éstas últimas, puesto que no existe un gran salto de conductividades eléctricas que haga funcionar a las estructuras de forma muy diferente, como en el ámbito de la hidrología. Incluso en casos en los que esta diferencia de conductividades eléctricas es elevada, dado que los experimentos de este tipo se realizan con electrodos colocados en la superficie y dichos puntos no coinciden generalmente con fracturas superficiales, es importante tener en cuenta la posibilidad de que el flujo de corriente eléctrica circule también a través de la matriz rocosa.

Como en estas situaciones no existen soluciones analíticas con las que poder comparar el modelo presentado, se utilizará un software de cálculo de soluciones numéricas mediante volúmenes finitos como es COMSOL Multiphysics®, en el que se implementarán cada una de las geometrías presentadas en la Figura (4.2.5) para el cálculo de la resistividad aparente en tres dimensiones. Posteriormente, se comparará esta distribución vertical de resistividad aparente con aquella calculada a través del código C++ y a la que se aplicará posteriormente la transformación de Fourier.

Inicialmente y a modo de calibración del modelo, se presentará una comparación muy sencilla considerando que tanto fracturas como matriz tiene la misma conductividad eléctrica, de forma que se podría utilizar la solución analítica para un dominio homogéneo y sin fracturas (EPM) para comprobar que el código C++ desarrollado ofrece un resultado adecuado. Del mismo modo que para las secciones anteriores, se presentará para cada geometría el error cometido en comparación con el valor esperado de resistividad aparente, siguiendo la Ecuación (4.7).

En el caso de fracturas paralelas (Figuras (4.2.6)) así como en los demás, es posible observar que la coincidencia no está garantizada para el caso en el que fracturas y matriz poseen las mismas conductividades eléctricas ($\sigma_f = \sigma_m = 1 \cdot 10^{-3}$). Aunque el error relativo no es muy elevado en ninguno de los casos ($\varepsilon_{max} = 11\%$), incluso en el caso de

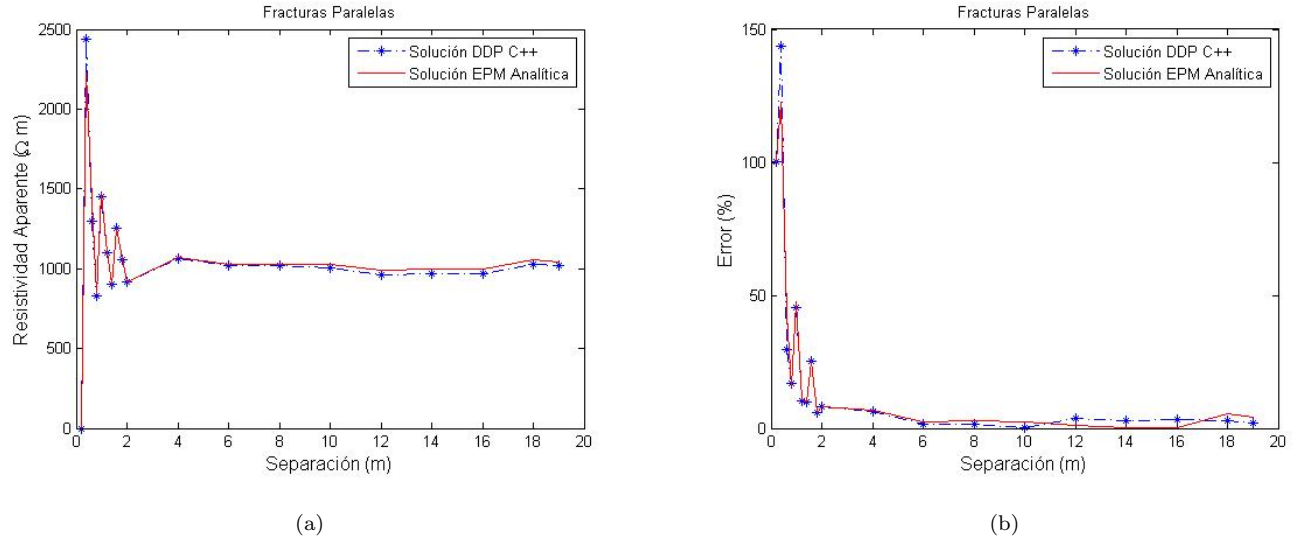


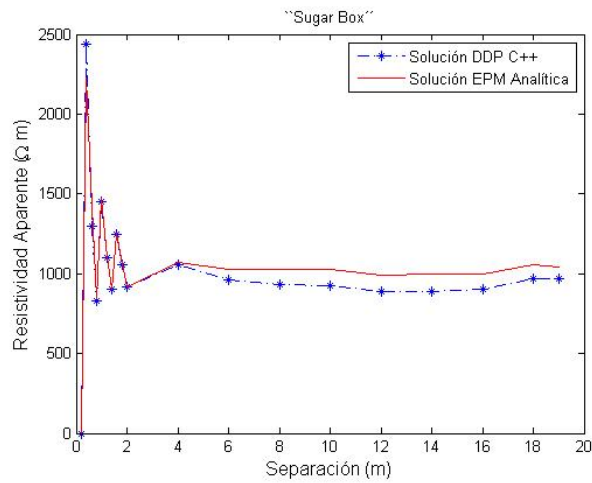
Figura 4.2.6: Caso de fracturas paralelas. Se utilizan 5 fracturas paralelas a la superficie del dominio y equidistantes entre sí. (a) distribución vertical de resistividad aparente y (b) error relativo cometido con respecto al valor esperado de resistividad aparente en el dominio homogéneo

la solución analítica, se observa que el ajuste entre las soluciones y el valor esperado no es muy adecuado. Esto se achaca a un problema de definición de las condiciones de contorno explicadas en el apéndice C, y que se resuelve en la sección 6. Este problema, en líneas generales, supone que las condiciones de contorno establecidas no respondan al comportamiento asintótico del potencial eléctrico, y por ello, el potencial eléctrico se modifica ligeramente al atravesar las diferentes fracturas existentes en el dominio, incluso aunque las conductividades eléctricas de ambas estructuras fuesen iguales. De esta forma la resistividad aparente no se corresponde exactamente con la esperada.

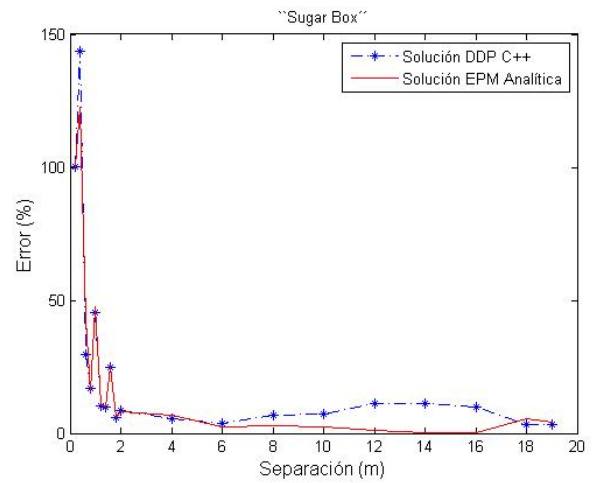
En los casos de “Sugar Box” (Figura (4.2.7)) y fracturas aleatorias (Figura (4.2.8)) es posible observar estos mismos problemas anteriormente comentados.

Se podría decir que el caso presentado para conductividades eléctricas iguales en matriz y fracturas no es el más adecuado, puesto que supone un límite del modelo. Sin embargo, ante los desconcertantes resultados mostrados con anterioridad, sólo cabe esperar una mejora de los mismos ante la redefinición de las condiciones de contorno. Por ello, y con el objeto de comparar situaciones más propicias para el modelo DDP presentado, a continuación se muestran los resultados obtenidos para las mismas geometrías anteriores, pero en esta ocasión con diferentes conductividades eléctricas en matriz y fracturas.

Para valorar diferentes situaciones, se reflejarán los resultados de la distribución vertical de resistividad aparente para cada geometría, suponiendo dos valores diferentes para la conductividad eléctrica de la matriz, manteniendo en un valor fijo la conductividad eléctrica de las fracturas, de forma que el ratio σ_f/σ_m sea diferentes en cada uno de los resultados mostrados. En esta ocasión se mostrarán los resultados para las dos situaciones explicadas para cada una de las geometrías, pero no aparecerá ninguna referencia al error relativo, puesto que en este caso no existe un valor esperado. Por ello, se compararán las solución procedente del código C++ con la solución provista por COMSOL

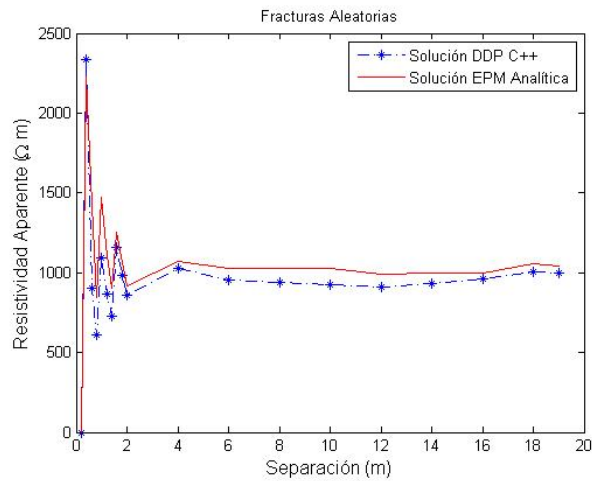


(a)

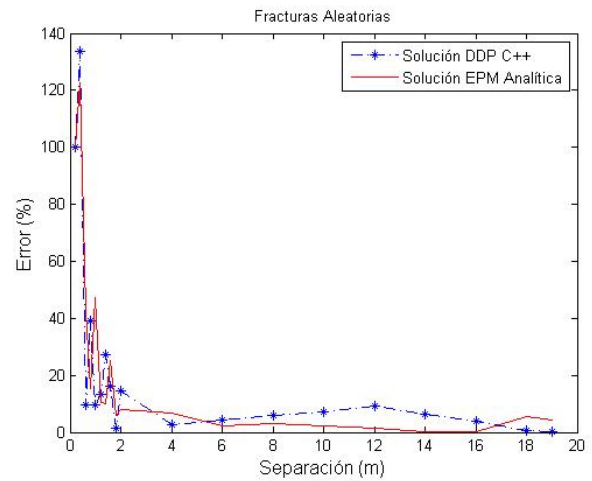


(b)

Figura 4.2.7: Caso de “Sugar Box”. Se utilizan 5 fracturas paralelas a la superficie del dominio equidistantes entre sí que cortan a otras 5 fracturas perpendiculares a la superficie y equidistantes entre sí. (a) distribución vertical de resistividad aparente y (b) error relativo cometido con respecto al valor esperado de resistividad aparente en el dominio homogéneo



(a)



(b)

Figura 4.2.8: Caso de fracturas aleatorias. Se utiliza una distribución aleatoria de fracturas (aunque siempre la misma, por mantener la coherencia del problema). (a) distribución vertical de resistividad aparente y (b) error relativo cometido con respecto al valor esperado de resistividad aparente en el dominio homogéneo

Multiphysics[®], con la aplicación de las condiciones de contorno establecidas en el apéndice C en ambas soluciones.

Durante la presentación de estos resultados se observará que principalmente existe coincidencia de soluciones para los valores de separación de electrodos centrales, entre 3 y 8 metros. El mal ajuste en los primeros valores se debe,

como ya se explicó en la sección 4.1, a un problema de discretización, que incluso aparece en la solución muy refinada presentada por COMSOL Multiphysics®. Sin embargo, como se puede observar en la Figura (4.2.9), los valores finales presentan una tendencia completamente opuesta entre ambas soluciones. Esto se debe previsiblemente al problema nombrado anteriormente en la definición de las condiciones de contorno, aunque no se ha podido corroborar. Se cree que es debido a dicho problema porque, a esas distancias de separación entre electrodos, los valores de resistividad aparente medidos se corresponden con profundidades que pueden tocar el límite inferior del dominio, donde se han impuesto las condiciones de contorno definidas en este trabajo. Posteriormente al desarrollo de este estudio, se cayó en la cuenta de que dicha definición (basada en la bibliografía de referencia) no era la correcta desde la base, por lo que en la sección 6 se plantea la definición correcta que se deberá utilizar en estudios futuros para una mejora de los resultados obtenidos mediante la aplicación del modelo DDP propuesto.

Esta descripción se puede comprobar igualmente en las otras geometrías analizadas, “Sugar Box” (Figura (4.2.10)) y fracturas aleatorias (Figura (4.2.11)), donde aparecen igualmente los problemas anteriormente descritos.

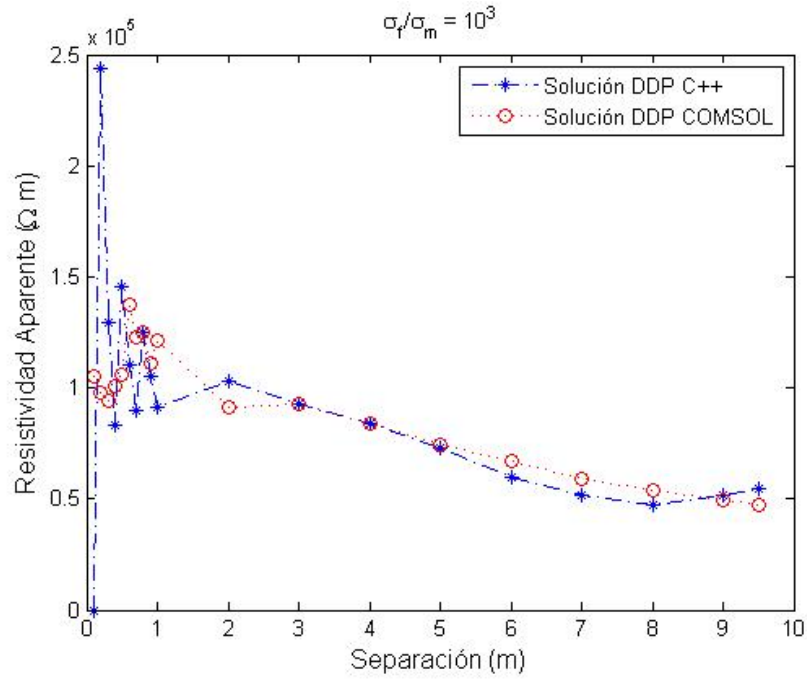
Es importante notar que no es posible asegurar que la solución proporcionada por COMSOL Multiphysics® sea una solución completamente correcta, puesto que se desconoce el código utilizado para el cálculo de su solución. Además, la aplicación de las condiciones de contorno en COMSOL Multiphysics® se hace en 3D, puesto que dicha solución es tridimensional. Estas condiciones de contorno en 3D son utilizadas previamente [*Dey and Morrison, 1979a*], tal y como se explica en el apéndice (C). Puesto que el error existente en la definición de las condiciones de contorno procede de la propia transformación de dichas condiciones al dominio de Fourier, es difícil decir que las condiciones de contorno aplicadas a ambas soluciones son las mismas. En el caso de la solución proporcionada por el código C++, las condiciones se aplican en 2.5D para luego transformar la solución ofrecida al dominio real en 3D, mientras que las condiciones de contorno aplicadas en la solución de COMSOL Multiphysics® son directamente definidas en 3D.

El hecho de considerar esta definición de las condiciones de contorno incorrecta se sustenta gráficamente en la tendencia creciente que presenta la Figura (4.2.11) para separaciones de los electrodos elevadas, lo que es completamente imposible, puesto que esto implicaría que el potencial eléctrico aumentaría a profundidades mayores, algo difícil de creer teniendo en cuenta que al ir atravesando cada una de las fracturas presentes en el dominio (con mayor valor de conductividad eléctrica), el potencial eléctrico disminuye gradualmente.

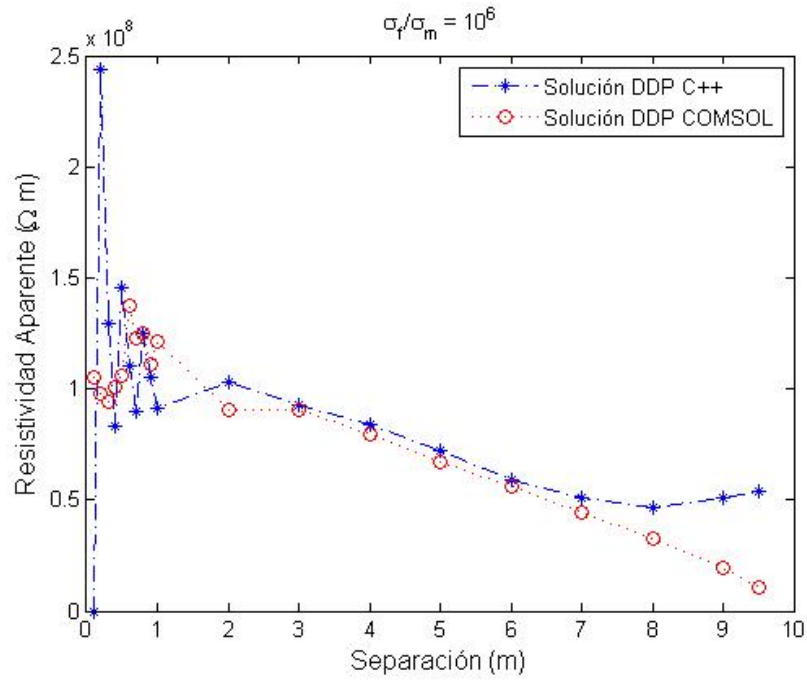
Por otro lado, hay algo que se puede considerar como adecuado en la solución ofrecida por el código C++ frente a aquella dada por COMSOL Multiphysics®, y es la constancia en la forma de las gráficas entre la imagen (a) y (b) para cada una de las situaciones. Es decir, que aunque se cambie el ratio σ_f/σ_m , la forma de la gráfica debería ser siempre la misma, aunque los valores alcanzados por el potencial eléctrico se vean modificados, evidentemente debido al cambio del ratio de conductividades eléctricas. Sin embargo, no ocurre lo mismo para el caso de la solución aportada por COMSOL Multiphysics®, donde se puede observar que esta constancia en la forma es aparentemente arbitraria.

En la Tabla (4.2.2) aparecen los parámetros utilizados para el cálculo de las soluciones utilizadas en la sección 4.2.2.

Por lo tanto y a modo de conclusión, es posible determinar que el modelo DDP desarrollado en este trabajo es capaz de ofrecer caracterizaciones eléctricas del subsuelo con una determinada fiabilidad, especialmente para valores

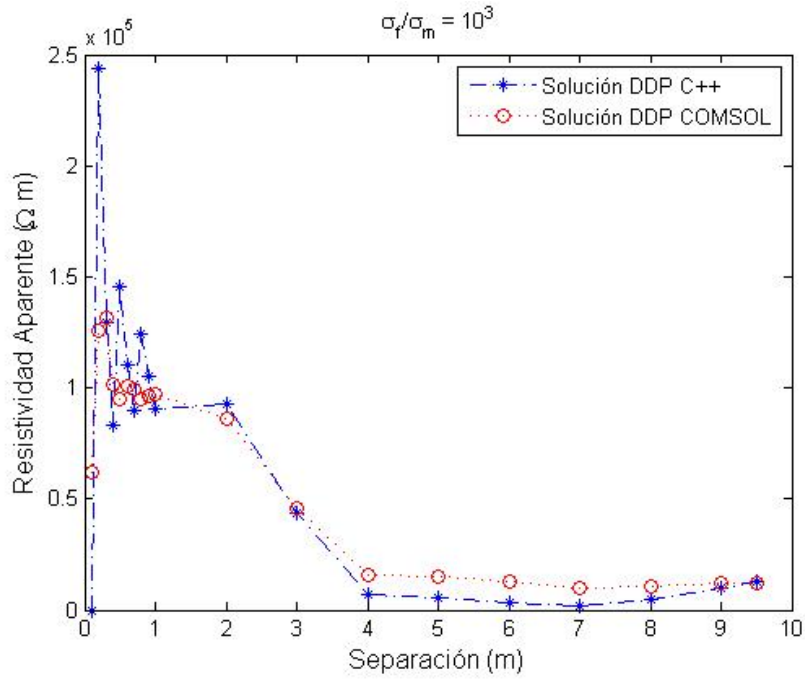


(a)

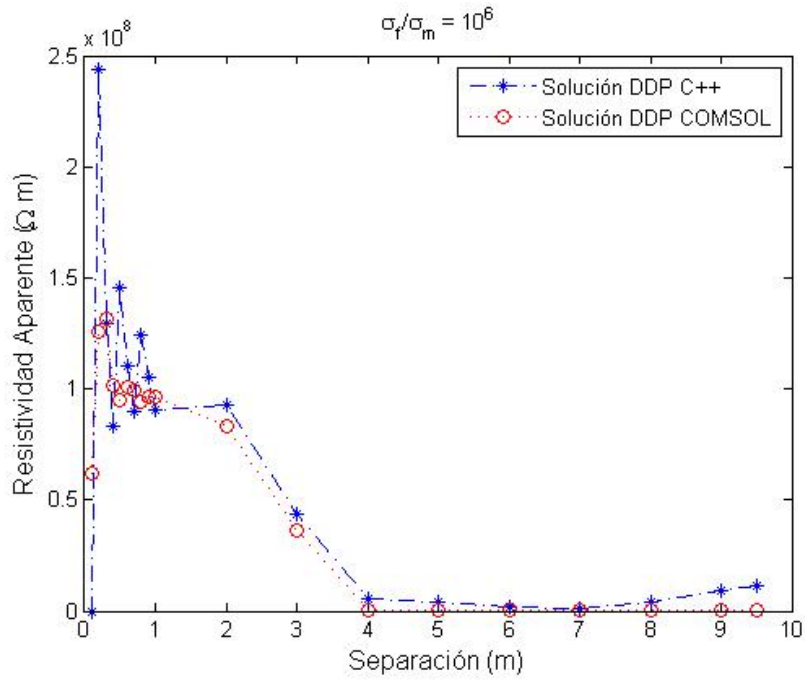


(b)

Figura 4.2.9: Caso de fracturas paralelas. En ambas situaciones $\sigma_f = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Sm}^{-1}$, teniendo siempre en cuenta que $\sigma_f/\sigma_m \gg 1$. (a) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Sm}^{-1}$; (b) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-8} \text{ Sm}^{-1}$

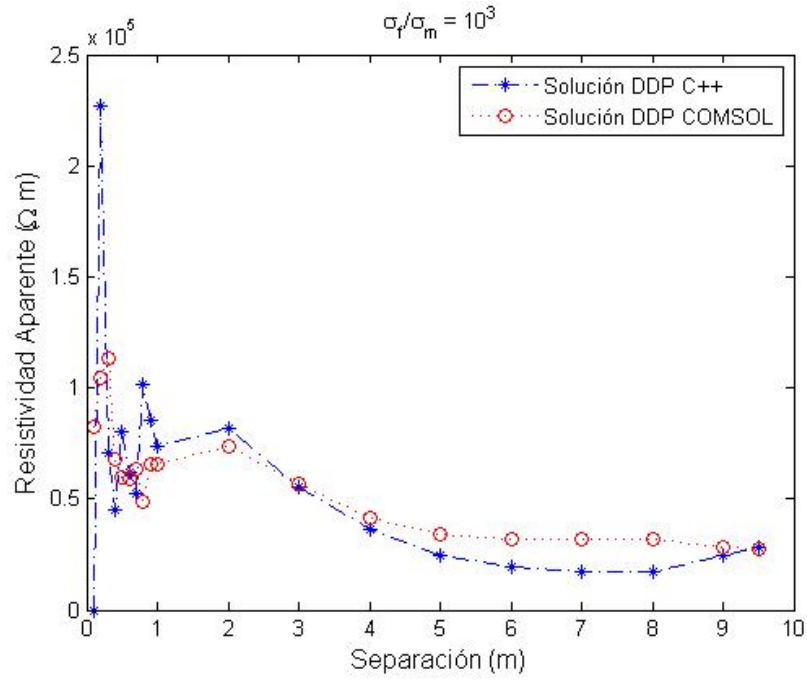


(a)

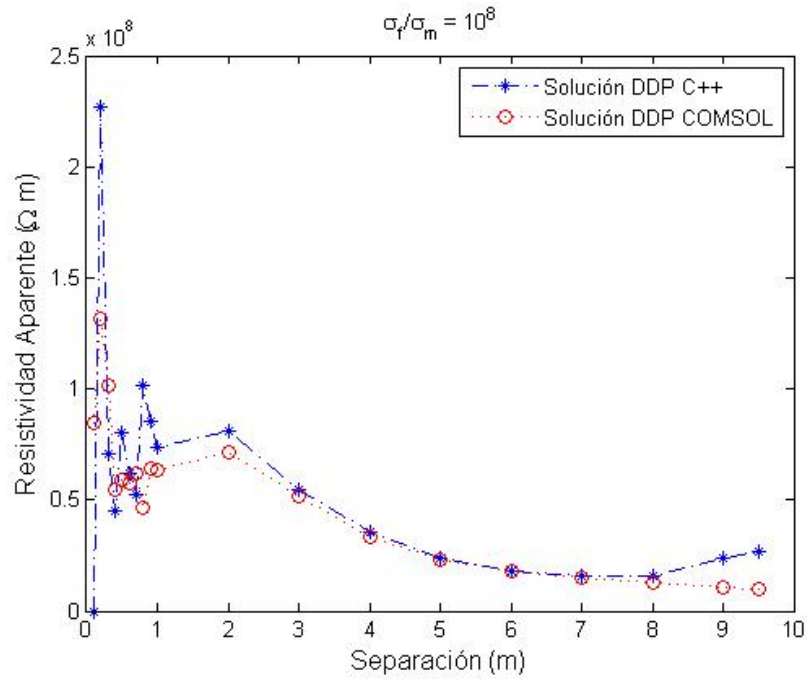


(b)

Figura 4.2.10: Caso de “Sugar Box”. En ambas situaciones $\sigma_f = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Sm}^{-1}$, teniendo siempre en cuenta que $\sigma_f/\sigma_m \gg 1$. (a) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Sm}^{-1}$; (b) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-8} \text{ Sm}^{-1}$



(a)



(b)

Figura 4.2.11: Caso de fracturas aleatorias. En ambas situaciones $\sigma_f = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Sm}^{-1}$, teniendo siempre en cuenta que $\sigma_f/\sigma_m \gg 1$. (a) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Sm}^{-1}$; (b) $\sigma_m = 1 \cdot 10^{-8} \text{ Sm}^{-1}$

contenidos entre unos márgenes estándar de separación entre los electrodos utilizados en la medición de la resistividad aparente, siguiendo el método Wenner explicado en la sección 2.1. Además, tampoco es posible descartar a posibilidad de que el modelo sea completamente fiable si se consideraran unas condiciones de contorno diferentes, planteadas más adelante para posibles ampliaciones del trabajo aquí presentado.

Por otra parte, es importante recordar que éste es un primer paso hacia la caracterización y representación de medios fracturados mediante un modelo DDP cuasi-tridimensional que sea capaz de distinguir claramente la presencia de fracturas en el subsuelo, de forma que debe servir como referencia para posteriores ampliaciones y mejoras del presente estudio, mejoras que se intentarán aportar desde la experiencia que aporta el trabajo en este campo en la sección 6.

Es por ello que los resultados obtenidas en las Figuras (4.2.9), (4.2.10) y (4.2.11), posiblemente los más concluyentes del estudio, pueden considerarse como la base para construir un mejor modelo en futuras investigaciones, pero que en ningún caso suponen un fracaso, aunque como ya se ha explicado, puedan presentar errores.

A continuación se dará una idea de la complejidad del proceso de inversión de la resistividad aparente, aunque no forme parte integrante del estudio realizado, básicamente para cerrar el ciclo en la obtención de la distribución de resistividad real del subsuelo.

Tabla 4.2.2: *Parámetros para el cálculo de las soluciones presentadas en la sección 4.2.1. Aunque hay tres geometrías diferentes, los parámetros que aparecen en esta tabla se utilizarán por igual para cada una de dichas geometrías*

Parámetros	Caso $\sigma_f/\sigma_m = 1$	Caso $\sigma_f/\sigma_m \gg 1$
Longitud del dominio (L_x [m])	60 [m]	60 [m]
Profundidad del dominio (L_z [m])	60 [m]	60 [m]
Intensidad de la fuente (I [A])	10 [A]	10 [A]
Conductividad eléctrica de la matriz (σ_m [Sm^{-1}])	$\sigma_m = 1 \cdot 10^{-3}$ [Sm^{-1}]	$\sigma_m = 1 \cdot 10^{-2}$ [Sm^{-1}]
Conductividad eléctrica de las fracturas (σ_f [Sm^{-1}])	$\sigma_f = 1 \cdot 10^{-3}$ [Sm^{-1}]	$\sigma_{f_1} = 1 \cdot 10^{-5}$ [Sm^{-1}] $\sigma_{f_2} = 1 \cdot 10^{-8}$ [Sm^{-1}]
Apertura de las fracturas (b_f [m])	$b_f = 1 \cdot 10^{-3}$ [m]	$b_f = 1 \cdot 10^{-3}$ [m]
Número de celdas por dimensión ($N_x/N_y/N_z$ [celdas])	201/201/201 [celdas]	201/201/201 [celdas]
Separación entre electrodos (s [m])	(0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9.5) [m]	
Posición de las fuentes (F_1/F_2 [m])	$L_x/2 - 3s/2$ [m]/ $F_1 + 3s$ [m]	$L_x/2 - 3s/2$ [m]/ $F_1 + 3s$ [m]
Números de onda (ω [m^{-1}])	[Xu et al., 2000]	[Xu et al., 2000]
Pesos de Fourier (g [adim.])	[Xu et al., 2000]	[Xu et al., 2000]

4.2.3. Resultados del Problema de Inversión

En este apartado se intentará dar una pequeña idea de la complejidad existente en el problema de inversión necesario para obtener el campo de resistividad real del subsuelo a partir de la distribución de resistividad aparente

obtenida mediante la aplicación del modelo DDP anteriormente desarrollado. Para ello se obtendrá la distribución de resistividad aparente de un dominio homogéneo y se resolverá el problema de inversión mediante el software Res2DInv[®], obteniendo de esta manera el campo de resistividad real del subsuelo.

La idea será la de comprobar que incluso para un dominio homogéneo, en el que el proceso de inversión debería ser único y sencillo, la resolución de dicho problema se convierte en la selección de uno de los posibles modelos de resistividad real que responden a ese patrón de distribución de resistividad aparente.

El método de obtención de la resistividad aparente del dominio se basará en la recreación de un conjunto de experimentos ERT de los que se irán tomando los valores de resistividad aparente necesarios para reconstruir dicha distribución en el subsuelo. Para ello, se fijará una longitud de dominio elevada (en este caso, $L_x = 300$ metros) y una separación fija entre electrodos (en este caso, $s = 3$ metros), siguiendo la distribución Wenner de la matriz de electrodos (ver sección 2.1). Con estas condiciones, se irá desplazando la matriz formada por los 4 electrodos de izquierda a derecha hasta cubrir la distancia total del dominio, consiguiendo de este modo los valores de resistividad aparente correspondientes a una profundidad concreta en línea horizontal. Una vez conseguida la distribución horizontal de resistividad aparente para este primer valor de profundidad, se doblará el valor de separación entre electrodos y se repetirá el movimiento de barrido horizontal de la matriz de electrodos para obtener las mediciones de resistividad aparente, en esta ocasión, correspondientes a una profundidad mayor, dado el aumento de separación entre electrodos.

Procediendo de esta forma hasta realizar un único experimento en todo el dominio, los puntos de medición de resistividad aparente formarán una pirámide invertida, tal y como se muestra en la Figura (4.2.12).

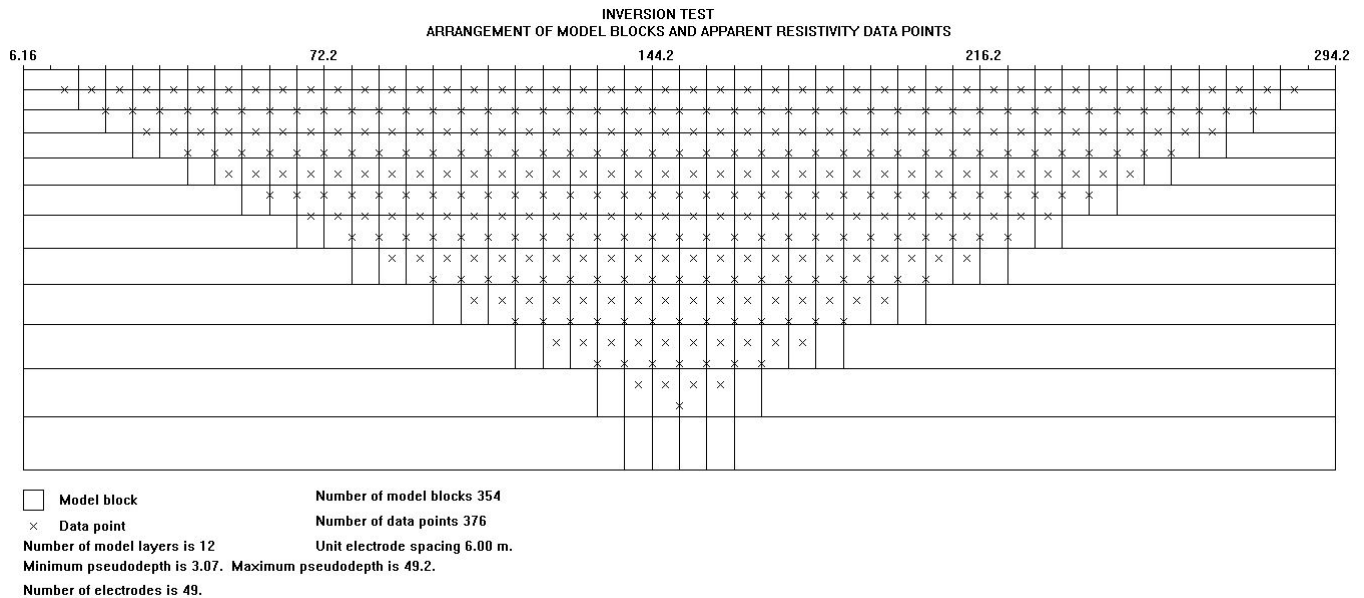


Figura 4.2.12: Distribución de las medidas de resistividad aparente tomadas en la realización de los experimentos ERT de la forma explicada en la sección 4.2.3 (Software Res2DInv[®])

Una vez obtenidas todas las mediciones de resistividad aparente del dominio para diversas profundidades, se

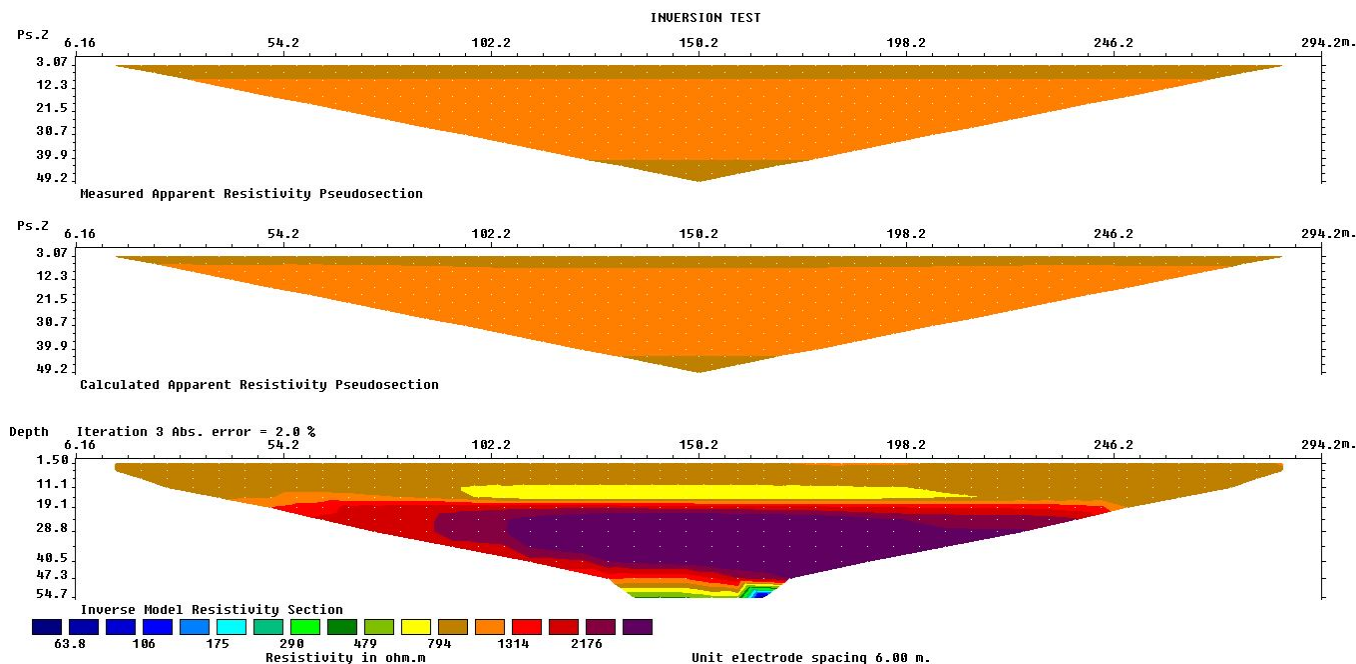


Figura 4.2.13: Distribución real de resistividad del subsuelo obtenida mediante la inversión de los datos medidos anteriormente. En la parte superior, se muestra la “pseudo-sección” de resistividad aparente medida de la forma explicada con anterioridad; en la parte central, aparece la “pseudo-sección” resultante de las iteraciones necesarias en el proceso de inversión, aquella que sirve como valor de entrada en la última iteración; en la parte inferior, se muestra la distribución de resistividad real del subsuelo que mejor se ajusta al modelo inicial (Software Res2DInv®)

utilizará el archivo generado con dichos valores (creado mediante un código Matlab® de elaboración propia) como entrada para el software de inversión Res2DInv®, encargado de realizar la inversión de una forma sencilla. Mediante este software se llevará a cabo el proceso de inversión para obtener la resistividad real del subsuelo que responda ante la “pseudo-sección” medida de resistividad aparente. Dicho programa presenta varias imágenes a la hora de invertir los datos, presentados en la Figura (4.2.13).

El software utilizado denomina “pseudo-sección” a la distribución de resistividad aparente obtenida, ya sea la inicial o aquella que resulta del proceso iterativo de inversión. El algoritmo de inversión consistirá en ir calculando iterativamente cuál es la mejor solución que se ajusta a la distribución inicial mediante la minimización del error existente entre ambas. Cuando el error supera un valor determinado, se vuelve a iterar, esta vez partiendo del modelo de resistividad aparente último, no del inicial. Una vez se llega al modelo óptimo que representa los datos iniciales de la mejor manera posible, el programa presenta la solución como la distribución de resistividad real del subsuelo (ver Figura (4.2.13)).

En primer lugar, es importante destacar el error de discretización ya comentado anteriormente que hace que incluso habiendo utilizado la solución analítica para un dominio homogéneo descrita en la Ecuación (A.4) se produzcan errores en los valores de resistividad aparente, que deberían mantenerse constante para todas las profundidades, aunque no

es así. En segundo lugar, se podría culpar a la transformación de Fourier de parte del error cometido en la generación de los datos de resistividad aparente, algo que también se ha comentado con anterioridad y que viene ligado a la discretización de la Ecuación (2.13) y la optimización de los números de onda seleccionados.

Sin embargo, lo que es realmente llamativo en la Figura (4.2.13) es el modelo de resistividad real que el software propone ante la “pseudo-sección” de resistividad aparente presentada como inicio del proceso. Esto permite imaginar la complejidad del proceso de inversión, principalmente aquella que añade la infinidad de soluciones que pueden aparecer para un mismo campo de resistividad aparente.

Para terminar con el trabajo, se presentarán las conclusiones que se han podido extraer del desarrollo del mismo, así como de los resultados e imágenes mostradas durante las secciones anteriores. Aunque se han ido explicando detalladamente cada una de las conclusiones que se mostrarán a continuación, se pretende recoger todas estas ideas de forma que se pueda trabajar sobre ellas más fácilmente a la hora de comprobar que realmente se han cumplido los objetivos que en dicha sección se muestran.

5. Conclusiones

En esta sección se pretende agrupar todas las ideas que han ido apareciendo a lo largo del desarrollo del trabajo, más en particular, en la sección 4, donde se han presentado los resultados que puede llegar a ofrecer el modelo propuesto.

1. Condiciones de Contorno versus Tamaño del Dominio

Como se vio en las Figuras (4.2.9), (4.2.10) y (4.2.11), existe una gran diferencia en los valores de resistividad aparente entre la solución proporcionada por COMSOL Multiphysics® y aquella ofrecida por el código C++ desarrollado en este trabajo para la implementación del modelo DDP propuesto. Esta diferencia, que se muestra principalmente en los valores iniciales y finales de resistividad aparente, tiene su origen en dos motivos diferentes. En este apartado se tratará de resolver el referente a la discrepancia en los valores de resistividad aparente correspondientes a grandes separaciones de los electrodos.

La razón por la que se cree que los valores de resistividad aparente para separaciones elevadas son incorrectos es la definición de las condiciones de contorno, realizada en el apéndice C. Bajo esta definición, las condiciones de contorno reflejan el comportamiento asintótico del potencial eléctrico en las fronteras derecha, izquierda e inferior, lo que implica que éste tiende a cero cuando la distancia a la fuente de inyección de corriente eléctrica es elevada. Esta definición es correcta tal y como se plantea en [Dey and Morrison, 1979a] y se utiliza en COMSOL Multiphysics® para obtener las soluciones presentadas en la sección 4. Sin embargo, cuando Dey and Morrison [1979b] adaptan dicha definición al dominio de Fourier no lo hacen correctamente, y aparece el error que aparece en la parte derecha de todas las figuras de la sección 4.2.2. Esta definición errónea hace que el potencial eléctrico se vea afectado por las condiciones de contorno forzadas en las fronteras derecha, izquierda e inferior, y por lo tanto, ocurra lo mismo con la resistividad aparente. Es por ello que su valor aumenta a grandes profundidades, cuando en realidad debería disminuir debido a la mayor conductividad eléctrica de cada una de las fracturas que atravesarían las líneas de campo eléctrico.

Lo que se quiere decir con esto es que se confía en que la solución aportada por COMSOL Multiphysics® sea correcta desde el punto de vista de la aplicación de las condiciones de contorno en 3D, cuya definición es correcta, mientras que con respecto a esto, la solución proporcionada por el código C++ debería corregirse. La corrección de la definición de las condiciones de contorno en el dominio de Fourier se aporta en la sección 6 como uno de los puntos a mejorar en estudios posteriores.

En cuanto al tamaño del dominio, otra posibilidad que evita la utilización de las condiciones de contorno Robin definidas en el apéndice C es la aplicación de condiciones de contorno Dirichlet que fijen el valor del potencial eléctrico a cero en las fronteras derecha, izquierda e inferior. De esta forma aparece un problema que afectará a la discretización y que se examinará a continuación, pero que con una gran capacidad de computación podría eliminarse por completo. Como no se dispone individualmente de este tipo de capacidad de cómputo, se ha descartado dicha solución.

2. Transformación Inversa de Fourier en DDP

Se ha estudiado con detenimiento el método utilizado para la transformación inversa de Fourier en la sección 3.9 de una forma general. Además, se verificó que el error cometido en dicho proceso para una situación en la que no existían fracturas en el subsuelo era despreciable (Figuras (4.1.1) y (4.1.2)), al menos desde el punto de vista en que este error afectaba a la distribución de resistividad real del subsuelo. Sin embargo, puesto que no existe ninguna solución analítica en 3D para el caso de presencia de fracturas en el subsuelo (considerando que matriz y fracturas presentan diferentes valores de conductividad eléctrica), es imposible conocer qué error supone la transformación inversa de Fourier. Este error puede cambiar en comparación con el de un medio homogéneo por diferentes motivos, entre los que se encuentra la brusca variabilidad del potencial eléctrico debido a los saltos de conductividad eléctrica.

A falta de mayores nociones en cuanto a la dimensión de este error, sólo cabe esperar que en un futuro sea posible desarrollar algún método que permita mejorar la transformación de Fourier aún más que en la actualidad, o incluso conocer directamente qué valor presenta el error cometido durante dicha transformación para dominios en los que existan fracturas.

3. Discretización del Dominio

La discretización del dominio de estudio es uno de los principales errores que ha aparecido durante la presentación de los resultados del modelo propuesto en la sección 4. Este problema supone que, sin una malla de numérica lo suficientemente refinada, las posiciones de los electrodos de intensidad y potencial se pueden solapar, existiendo la posibilidad de que dos o más electrodos se encuentren situados sobre la misma celda. En esta situación, la diferencia de potencial podría ser nula o simplemente inadecuada entre los electrodos de potencial, de forma que se modificará el valor de la resistividad aparente obtenido para dicha medición. Este es el problema que aparece para los valores de resistividad aparente correspondientes a separaciones de los electrodos muy pequeñas, como por ejemplo, en las Figuras (4.2.2) o (4.2.6).

Para la solución o mejora de este problema sí se pueden plantear algunas posibilidades que permitirían al menos resolver en parte el error existente para separaciones pequeñas de los electrodos:

(a) *Refinar la discretización*

Simplemente consistiría en aumentar el número de celdas de computación para disminuir la posibilidad de que ocurra esa coincidencia en la posición de los electrodos detallada con anterioridad. Esta solución implicaría un aumento del coste computacional, aunque con equipos de cálculo adaptados a estas condiciones no supondría un problema.

Para manejar un orden de magnitud del tiempo de cálculo empleado en la obtención de las soluciones planteadas en la sección 4.2.2, quizá los más exigentes computacionalmente, en el caso del código C++ ronda las 2 horas de cálculo la obtención de la distribución vertical de resistividad aparente, mientras que se sitúa en torno a 4 horas para el caso de COMSOL Multiphysics[®], ambas para la geometría de fracturas paralelas, la más sencilla.

Es por ello que incrementar aún más el tiempo de computación no debería ser lo adecuado, al menos siempre que se pueda evitar.

(c) *Métodos de interpolación*

Otra de las opciones que se pueden plantear para resolver el problema de discretización, sin incrementar en este caso el coste computacional, sería la interpolación de los valores de potencial eléctrico con el objetivo de obtener la distribución del potencial eléctrico en aquellos puntos interiores entre las celdas numéricas utilizadas en la discretización del dominio.

De esta forma no se incrementa el coste computacional, puesto que, mediante la función *spline.m* desarrollada en Matlab[®], se obtienen buenos resultados con un incremento de tiempo del orden de segundos.

Sin embargo, la mejora en los resultados, aunque sirve indudablemente para resolver el problema de los valores de resistividad aparente para pequeñas separaciones de los electrodos, no supone, por el contrario, una mejora en los valores de resistividad aparente para las demás separaciones de los electrodos, lo que no hace tan efectivo el método de interpolación. Esto se debe a que se trata de un método de post-procesado, y los errores de cálculo siguen existiendo, aunque se busque calcular los valores de resistividad entre medidas.

4. Extensión del Método de Eliminación de la Singularidad para el Modelo DDP

Tal y como se ha presentado en el apéndice B, el método de eliminación de la singularidad se puede aplicar a situaciones en las que no existan fracturas en el subsuelo (EPM), de modo que en la sección 4.1 se confirma la validez de dicho método. Sin embargo, este método no se puede aplicar simultáneamente con la consideración de fracturas en el subsuelo, puesto que las ecuaciones planteadas no son las mismas, tal y como se puede observar en la sección 3.

Por lo tanto, se plantea la posibilidad de extender el método desarrollado para poder aplicarlo al modelo DDP planteado, de forma que se pueda evaluar la dimensión del error debido al problema de la singularidad en caso de que existan fracturas en el subsuelo.

6. Trabajo Futuro

La intención de esta sección es la de proyectar de alguna forma cuáles podrían ser aquellos aspectos en los que se podría mejorar el presente modelo desde un punto de vista computacional o de mejora de los resultados mostrados, de forma que el mismo desarrollo del problema hecho hasta el momento sirva como base para construir un modelo más efectivo y robusto. Con esta intención, se presentarán una serie de puntos en los cuales se ha visto un posible foco de error y una vía de mejora del modelo propuesto en las secciones anteriores. Algunos de estos puntos están siendo desarrollados en la actualidad por los autores de este mismo trabajo, aunque aún no es posible la presentación de resultados que corroboren la efectividad prevista de dichas modificaciones. Sin embargo, la gran mayoría de estas consideraciones no será llevadas a cabo como continuación de este estudio, sino que se presentan para que nuevos investigadores entren más en detalle en su desarrollo.

Por lo tanto, se plantearán varias posibles alternativas de estudio futuro:

(a) Condiciones de Contorno

Como se explica en el apéndice C, las condiciones de contorno utilizadas en el desarrollo del problema han sido anteriormente utilizadas por un gran número de autores en el dominio de Fourier (e.g. *Dey and Morrison* [1979b], *Greenhalgh* [2008], *Pidlisecky and Knight* [2008]). Sin embargo, una vez presentados los resultados que aparecen en la sección 4.2, se fijó la atención en el extraño comportamiento del modelo para grandes profundidades (Figuras (4.2.9), (4.2.10) y (4.2.11)), que se asoció rápidamente con un error en las condiciones de contorno utilizadas. Realizando nuevas comprobaciones y remontándose a la procedencia de la definición de dichas condiciones de contorno, se pudo observar que desde el comienzo de su uso, *Dey and Morrison* [1979b] no hacen un razonamiento correcto de la transformación de Fourier, incurriendo de esta forma en el posible error que se puede observar en los resultados presentados en este trabajo.

Las condiciones de contorno que plantean *Dey and Morrison* [1979b] son las siguientes:

$$\alpha(x, \omega, z)\bar{\phi}(x, \omega, z) + \beta(x, \omega, z)\frac{\partial\bar{\phi}(x, \omega, z)}{\partial\vec{n}} = \gamma(x, \omega, z) \quad (6.1)$$

Donde:

$$\alpha(x, \omega, z) = \omega \frac{\mathcal{K}_1(\omega r)}{\mathcal{K}_0(\omega r)} \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} \right); \quad \beta(x, \omega, z) = 1; \quad \gamma(x, \omega, z) = 0 \quad (6.2)$$

La procedencia de estas condiciones de contorno hay que buscarla en las correspondientes condiciones definidas en 3D por estos mismos autores en *Dey and Morrison* [1979a], ofreciendo la siguiente expresión:

$$\alpha(x, y, z)\phi(x, y, z) + \beta(x, y, z)\frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial\vec{n}} = \gamma(x, y, z) \quad (6.3)$$

Donde:

$$\alpha(x, y, z) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^2}; \quad \beta(x, y, z) = 1; \quad \gamma(x, y, z) = 0 \quad (6.4)$$

Si se mantiene la lógica del problema, cualquier ecuación en el dominio de Fourier debería surgir como la transformación de Fourier definida en la Ecuación (2.12) aplicada a la correspondiente ecuación en tres dimensiones.

Sin embargo, no ocurre lo mismo con las Ecuaciones (6.3) y (6.1), puesto que al aplicar dicha transformación el resultado no es el mismo.

Es por esto que a continuación se presentará las condiciones de contorno que, siguiendo la misma línea utilizada en el resto del trabajo, deberían utilizarse para representar realmente el comportamiento asintótico del potencial eléctrico en los límites del dominio, tal y como aseguran los autores que defienden el uso de las condiciones de contorno definidas en el apéndice C.

En primer lugar, se aplicará la transformación de Fourier a las condiciones de contorno definidas en la Ecuación (6.3) con el objetivo de obtener su definición en el dominio de Fourier, de forma que es posible obtener la siguiente expresión:

$$\alpha(x, y, z)\phi(x, y, z) + \frac{\partial\phi(x, y, z)}{\partial\vec{n}} = 0 \xrightarrow{\text{Transformada}} \quad (6.5)$$

$$\longrightarrow \tilde{\alpha}(x, \omega, z) * \bar{\phi}(x, \omega, z) + \omega \frac{\partial\bar{\phi}(x, \omega, z)}{\partial\vec{n}} = 0 \quad (6.6)$$

Donde (*) simboliza el producto de convolución entre dos funciones, en este caso, $\tilde{\alpha}(x, \omega, z)$ y $\bar{\phi}(x, \omega, z)$. La Ecuación (6.6) simboliza las condiciones de contorno que deberían utilizarse para intentar eliminar el problema descrito en la sección 4.2 en cuanto a la tendencia incorrecta de la resistividad aparente a grandes profundidades.

Del mismo modo que en el apéndice C, es posible asumir que el potencial eléctrico a distancias suficientemente grandes de la fuente de corriente así como de cualquier inhomogeneidad viene descrito por la Ecuación (A.4).

De esta forma es posible definir el valor $\bar{\phi}(x, \omega, z)$ que aparece en la Ecuación (6.6):

$$\bar{\phi}(x, \omega, z) = \frac{I}{2\pi\sigma} \mathcal{K}_0(\omega r) \quad (6.7)$$

Siendo $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + z^2}$ la distancia desde la fuente de inyección de corriente hasta cualquier punto del dominio.

Por otro lado, se debe definir el valor que adoptará el término $\tilde{\alpha}(x, \omega, z)$, puesto que será necesario para calcular la convolución definida en la Ecuación (6.6). Aplicando la transformación de Fourier al término $\alpha(x, y, z)$, es posible obtener la siguiente expresión:

$$\tilde{\alpha}(x, \omega, z) = \int_0^\infty \alpha(x, y, z) \cos(\omega y) dy \quad (6.8)$$

Donde $\alpha(x, y, z)$ viene definida en la Ecuación (6.4).

De esta forma, mediante la resolución de la Ecuación (6.8), se presentará un valor para $\tilde{\alpha}(x, \omega, z)$ que permitirá desarrollar un algoritmo para el producto de convolución definido anteriormente. Por lo tanto, haciendo uso de *Bateman* [1954]:

$$\tilde{\alpha}(x, \omega, z) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} \right) \frac{\exp\left(-\omega \sqrt{(x - x_0)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + z^2}} \quad (6.9)$$

Por lo tanto, de esta forma quedan completamente definidas las nuevas condiciones de contorno a implementar en el modelo propuesto, con el objetivo de eliminar la extraña tendencia referenciada anteriormente y presentada en la sección 4.2.

La discretización de la Ecuación (6.6) vendría dada por la función *conv.m*, construida por defecto en Matlab[®] siguiendo la expresión:

$$\mathcal{P}(k) = \sum_{j=1}^{m+n-1} \tilde{\alpha}(j) \bar{\phi}(k-j+1) \quad (6.10)$$

Donde:

$$\begin{aligned} m &= \text{dimensión del vector } \tilde{\alpha} \\ n &= \text{dimensión del vector } \bar{\phi} \\ m+n-1 &= \text{dimensión del vector } \tilde{\alpha} * \bar{\phi} \\ j &= \max(1, k+1-n), \dots, \min(k, m) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Donde $\mathcal{P}(k)$ representa el producto de convolución.

Esta concepción de las condiciones de contorno es completamente novedosa, y no se ha comprobado su validez hasta el momento, por lo que puede suponer un gran avance en la materia conseguir cambiar lo que hasta el momento ha sido una consideración completamente errónea en las condiciones de contorno utilizadas anteriormente. Quizá este error en el que se hace hincapié no haya aparecido antes por la simple utilización de dominios lo suficientemente grandes como para evitarlo a grandes profundidades, medida que es difícil de aplicar en este modelo DDP, dado el alto coste computacional que supondría el aumento de tamaño del dominio de estudio manteniendo la resolución de la discretización constante.

Al igual que ocurre a grandes profundidades, es de esperar que este problema aparezca igualmente en los bordes laterales del dominio bajo la aplicación del modelo DDP, de forma que los resultados también se verían afectados en dichas fronteras.

Por lo tanto, se trata de un tema de gran importancia el hecho de intentar solucionar de la mejor manera posible esta cuestión, que se entiende que podría quedar resuelta con este novedoso planteamiento de las condiciones de contorno en el dominio de Fourier. Esta nueva definición está siendo desarrollada actualmente por los autores de este proyecto, y en breve se podrán obtener los esperados resultados.

(b) Linealidad del Problema de Inversión

Durante la sección 2.1.3 se desarrollaron las bases que permitían comprender lo complejo del problema de inversión para obtener la distribución de resistividad real del subsuelo a partir de la resistividad aparente medida mediante los experimentos de campo pertinentes. Como se explicó, la inversión lineal no es quizá la más adecuada para desarrollar el problema inverso, aunque si una de las más utilizadas por su sencillez y fácil comprensión, además de servir para comprender como un todo el problema de obtención del campo de resistividad eléctrica del subsuelo.

Sin embargo, como ya se comentó brevemente durante la explicación del problema de inversión, existen muchas otras posibilidades a la hora de resolverlo, como por ejemplo, los métodos Markov Chain Monte Carlo (MCMC), el criterio de mínimos cuadrados (ya visto con anterioridad), los criterios de mínimo valor absoluto y *minimax* o

los métodos de resolución de problemas de inversión que incluyen funciones en sus datos de partida (*Tarantola* [2005]). A continuación se presentarán brevemente cada uno de estos métodos dedicados a la resolución de problemas de inversión en diversos ámbitos:

1. *Métodos Markov Chain Monte-Carlo (MCMC)*

Son un conjunto de métodos estadísticos basados en la búsqueda de la distribución de probabilidad óptima de una muestra de datos. Esto implicaría que la relación entre datos y parámetros del modelo ya no es una función, sino que viene dada por una relación estadística, es decir, una función de probabilidad. Estos métodos son muy utilizados en geofísica para la inferencia de propiedades del subsuelo a partir de datos de diferentes campos físicos, como, por ejemplo, para datos gravitacionales, magnéticos, sísmicos, electromagnéticos... (e.g. *Anderssen and Seneta* [1971], *Anderssen and Seneta* [1972], *Dahl-Jensen et al.* [1998], *Fox et al.* [2015], *Luo and Foss* [2013], *Minsley* [2011], *Press* [1968], *Rothman* [1985], *Xu et al.* [2013]).

Del mismo modo, estos métodos son muy utilizados en otras disciplinas científicas, principalmente en medicina (e.g. *Heath* [1997], *Huelsenbeck et al.* [2001]).

2. *Criterio de Mínimos Cuadrados*

Este es posiblemente el método más sencillo en cuanto a la resolución del problema inverso. Es uno de los más utilizados, básicamente debido a la simplicidad en los cálculos que implica. Sin embargo, falla en cuanto a robustez, y es muy sensible a un pequeño número de errores (*Tarantola* [2005]).

Aunque supone el método posiblemente más sencillo, su uso está muy extendido, especialmente para problemas de tipo gravitatorio y magnético (e.g. *Kirschvink* [1980], *Loke and Barker* [1995], *Nemeth et al.* [1999]).

3. *Criterios de Mínimo Valor Absoluto y “Minimax”*

El criterio de mínimo valor absoluto se corresponde con la minimización del error producido en el proceso de inversión mediante la utilización de la norma L-1. Por el contrario, el criterio “minimax” se refiere al uso de la norma L- ∞ como método de minimización para la obtención del modelo buscado.

Ambos son casos especiales del criterio de mínimos cuadrados, y se aplican generalmente porque suponen una mayor robustez en cuanto a errores (de redondeo generalmente), así como ante valores atípicos que puedan suponer un problema en otras situaciones (e.g. *Claerbout and Muir* [1973], *Descloux* [1963], *Djikpéssé and Tarantola* [1999]).

4. *Problema Inverso Funcional*

En este caso, el problema inverso depende de alguna forma de una función: los datos o los parámetros del modelo pueden depender bien de alguna variable espacial o del tiempo, incluso de ambas variables a la vez. Bajo estas circunstancias, es más útil y manejable trabajar con el problema inverso a través de funciones, y no mediante distribuciones de probabilidad. Esta formulación funcional puede ser adaptada al trabajo con ordenadores mediante la discretización de dichas funciones.

En este aspecto, diferentes autores han intentado adaptar problemas que podían ser resueltos estadísticamente (mediante distribuciones de probabilidad) a problemas funcionales (e.g. *Backus* [1970], *Franklin* [1970]).

En definitiva, tras examinar los diversos métodos que pueden utilizarse para resolver el problema inverso, queda claro que no es un gran error la utilización de métodos lineales para la inversión de datos electromagnéticos, que son exactamente los involucrados en este proyecto, datos de resistividad eléctrica del terreno.

Por lo tanto, aunque existen métodos que puede describir aún mejor el terreno en cuanto a sus propiedades, se decide mantener la decisión inicial de utilizar una concepción lineal del problema inverso, facilitando la resolución de dicho problema y obteniendo unos resultados lo suficientemente consistentes como para seguir utilizando esta consideración de linealidad.

Aunque, como ya se ha dicho, no se abordará este tema en profundidad, podría quedar abierta la posibilidad de trabajar en esta línea de mejora del problema inverso, aunque como prioridad se debe establecer la solución de problemas existentes en cuanto al desarrollo del modelo DDP, previo a la propia inversión de los datos de resistividad aparente que dicho modelo generaría previamente a la inversión.

(c) **Optimización del Código C++**

Otra de las posibilidades existentes en cuanto a la mejora de los resultados, sería la de disminuir de alguna forma el tiempo de computación de las soluciones presentadas anteriormente. Para ello, la idea que se propone en esta sección será la de utilizar computación paralela para disminuir a la mitad el tiempo invertido en el cálculo de soluciones, sobre todo en aquellas que afecta a la simulación de diversos experimentos de campo que, posteriormente, se superpondrán para generar un único resultado de distribución de resistividad aparente (e.g. *Culler et al.* [1996], *Megiddo* [1983], *Rodrigue* [2014]).

En definitiva, estos serían los puntos principales en los que se ha creído posible mejorar el modelo planteado en este trabajo. Sólo restaría decir que, aunque evidentemente hay puntos en los que el modelo puede mejorar, sería importante resaltar de nuevo que se trata de la base necesaria para la construcción posterior de mejores modelos que permitan una caracterización de cualquier medio geológico y de las fracturas existentes en el mismo, así como la medida de las diferentes propiedades que podrían ser de interés desde un punto de vista científico.

Aún queda mucho trabajo que hacer en esta área, y este trabajo podría ser el inicio de toda una serie de avances que permitiesen, desde generar datos sintéticos de medios con presencia de fracturas para su estudio hasta la utilización de este modelo para el estudio de cualquier tipo de sistemas geológicos reales que permita arrojar luz sobre las posibilidades de obtención de recursos naturales o almacenamiento de residuos industriales comentadas en la sección 1.

A. Apéndice A: Solución Homogénea 2.5D y Posición de la Fuente de Corriente

La simplificación realizada en la Ecuación (3.7) en cuanto a la posición de la fuente de intensidad, se debe a la incapacidad para llegar a una solución analítica del problema en el dominio de Fourier en el caso de un dominio homogéneo, que es útil a la hora de definir las condiciones de contorno utilizadas en el estudio realizado, tal y como se presenta en el apéndice C.

Para explicar el problema que conllevaría considerar la fuente de intensidad en cualquier posición sobre la superficie del dominio ($z_0 = 0$), se presentará en primer lugar la obtención del campo de potencial eléctrico de un dominio homogéneo en 2.5D suponiendo la fuente situada en $y_0 = 0$, y en segundo lugar se desarrollará una expresión semi-analítica para el campo de potencial eléctrico de un dominio homogéneo en 2.5D, considerando que la fuente de intensidad puede estar colocada en cualquier punto de la superficie.

A.1. Solución 2.5D Homogénea

Tomando como partida la Ecuación (3.7), se asume que la conductividad del dominio es constante y que la fuente está situada en $y_0 = 0$, es decir, la ecuación anterior se puede expresar como:

$$-\nabla^2 \bar{\phi}(x, \omega, z) + \omega^2 \bar{\phi}(x, \omega, z) = \frac{I}{2\sigma} \delta(x - x_0) \delta(z) \quad (\text{A.1})$$

Esta ecuación se denomina comúnmente “Ecuación Modificada de Helmholtz”, que ha sido resuelta bajo determinadas condiciones de contorno por diferentes autores (e.g. *Cheng et al.* [2006], *Kleinman and Roach* [1982]).

Dada la complejidad de la resolución de la Ecuación (A.1), se intentará obtener la expresión buscada a partir de la solución de la ecuación de conservación de la carga (Poisson) en 3D para un dominio homogéneo. Esta ecuación es la siguiente:

$$-\nabla^2 \phi(x, y, z) = \frac{I}{\sigma} \delta(x - x_0) \delta(y - 0) \delta(z) \quad (\text{A.2})$$

De la cual *Telford et al.* [1990] proporciona la solución:

$$\phi(x, y, z) = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - 0)^2 + z^2}} \quad (\text{A.3})$$

Donde $(x_0, y_0 = 0, z_0 = 0)$ es la posición de la fuente de intensidad, σ es la conductividad eléctrica constante del medio, $\phi(x, y, z)$ es el campo de potencial eléctrico e I es la intensidad eléctrica inyectada por la fuente.

Sabiendo que la Ecuación (A.3) es solución de la Ecuación (A.2), y teniendo en cuenta que la Ecuación (A.1) es el resultado de aplicar la transformada de Fourier- coseno a la Ecuación (A.2), se buscará demostrar que la transformada de la Ecuación (A.3) es solución de la Ecuación (A.1).

Aplicando la Ecuación (2.12) a la Ecuación (A.3), se obtiene la siguiente expresión:

$$\bar{\phi}(x, \omega, z) = \frac{I}{2\pi\sigma} \mathcal{K}_0 \left(\omega \sqrt{(x - x_0)^2 + z^2} \right) \quad (\text{A.4})$$

Donde \mathcal{K}_0 es la función de Bessel modificada de segundo tipo de orden 0. Aquí cabría destacar el motivo por el que se utiliza la transformación de Fourier-coseno y no otro tipo, hecho que queda implícito en la Ecuación (A.4) al aplicar la transformada de Fourier definida en la Ecuación (2.12):

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-0)^2 + (z-z_0)^2}} dy = \mathcal{K}_0 \left(\sqrt{(x-x_0)^2 + z^2} \omega \right) \quad (\text{A.5})$$

Esta equivalencia permite simplificar enormemente la aplicación de las condiciones de contorno del problema, en las que participará la solución homogénea presentada aquí. El contraste entre esta solución y aquella que tiene en cuenta la fuente colocada en cualquier posición de la superficie se verá más en detalle en la sección A.2.

Por lo tanto, para demostrar que la Ecuación (A.4) es solución de la Ecuación (A.1), se procederá a comprobar que se cumple la igualdad. La expresión para el laplaciano de $\bar{\phi}(x, \omega, z)$ vendrá dada por:

$$\nabla^2 \bar{\phi}(x, \omega, z) = -\frac{I\omega}{2\pi\sigma} \left\{ \frac{\mathcal{K}_1(\sqrt{(x-x_0)^2 + z^2} \omega)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + z^2}} - \frac{\omega}{2} \left[\mathcal{K}_0(\sqrt{(x-x_0)^2 + z^2} \omega) + \mathcal{K}_2(\sqrt{(x-x_0)^2 + z^2} \omega) \right] \right\} \quad (\text{A.6})$$

Donde \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 son las funciones de modificadas de Bessel de primer y segundo orden respectivamente.

Sustituyendo estas expresiones en la Ecuación (A.1) y utilizando las identidades de las funciones de Bessel (*Watson* [1995]), es posible obtener la trivialidad $0 = 0$, de forma que se puede decir que queda demostrado que la Ecuación (A.4) es solución de la Ecuación (A.1).

A.2. Posición de la Fuente de Corriente

Una vez demostrado que la solución para el campo de potencial eléctrico en 2.5D y dominio homogéneo, suponiendo que la fuente se encuentra en $y_0 = 0$, es completamente válida, se demostrará que la expresión semi-analítica generada al considerar la posición de la fuente como aleatoria es mucho más tediosa de manejar, y además no ofrece una ventaja con respecto a la anterior, puesto que ya se ha comentado en la sección 3.2 que se puede analizar el problema teniendo en cuenta siempre que el plano $y = 0$ es en el que se encuentra la fuente de intensidad.

Por lo tanto, partiendo de la Ecuación (A.2), esta vez teniendo en cuenta una posición genérica para la fuente de intensidad, x_0, y_0, z_0 , se puede decir que la solución para esta expresión viene dada por:

$$\phi(x, y, z) = \frac{I}{2\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad (\text{A.7})$$

De esta forma, procediendo de igual manera que anteriormente, se aplicará la Ecuación (2.12) a la expresión anterior, con el objetivo de calcular la solución de problema en 2.5D:

$$\bar{\phi}(x, \omega, z) = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_0^\infty \frac{\cos(\omega y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} dy \quad (\text{A.8})$$

En este caso, la simplificación no es inmediata, de forma que se planteará un cambio de variable que permita reducir la complejidad de la expresión anterior:

$$\begin{cases} p = y - y_0 \\ y = p + y_0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Mediante la aplicación de este cambio de variable, es posible obtener una expresión semi-analítica para el campo de potencial eléctrico en el dominio de Fourier. Se considera semi-analítica por el simple hecho de contar con un término integral que no es posible reducir en mayor medida y que supondrá una aproximación numérica para su cálculo:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(x, \omega, z) = \frac{I}{2\pi\sigma} \left\{ \cos(\omega y_0) \mathcal{K}_0 \left(\omega \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right) - \frac{\phi}{2} \sin(\omega y_0) \left[\mathcal{I}_0 \left(\omega \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{L}_0 \left(\omega \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \right) \right] + \int_0^{y_0} \frac{\cos(\omega y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} dy \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Donde \mathcal{I}_0 es la función modificada de Bessel de primer tipo de orden 0 y \mathcal{L}_0 es la función modificada de Struve de orden 0, que pueden ser implementadas directamente en Matlab[®] con scripts predefinidos.

Como se ha hecho ver, sería necesario evaluar numéricamente este término integral en caso de querer utilizar la Ecuación (A.10). Además se ha comprobado que, mediante la función predefinida en Matlab[®] *quad.m*, el valor de potencial eléctrico entregado por la iteración numérica es muy similar al que se calcula considerando que la fuente está situada en $y_0 = 0$ (Ecuación (A.4)). Es por ello que se utilizará la simplificación explicada en la sección A.1, que permitirá posteriormente un sencillo tratamiento de las condiciones de contorno.

B. Apéndice B: Eliminación de la Singularidad

En primer lugar, es necesario especificar que este método ha sido elaborado considerando que el medio de trabajo no presenta fracturas, de modo que el intercambio de flujo de corriente eléctrica entre fracturas y matriz es un concepto que no tiene sentido considerar. Esta consideración es consecuencia de tomar como punto de partida para el algoritmo de eliminación de la singularidad la solución presentada en la Ecuación (A.4) para un medio con conductividad eléctrica constante, como se verá a continuación. La imposibilidad de utilizar una solución similar a ésta para un caso en el que exista intercambio de flujo de corriente eléctrica ha llevado a desarrollar únicamente este método en un entorno EPM como adaptación al método de volúmenes finitos de aquel elaborado por *Lowry et al.* [1989], considerando además la modificación dimensional que aporta el algoritmo 2.5D, explicada anteriormente.

Como se explicó en la sección 3.2, las ecuaciones diferenciales elípticas presentan un comportamiento singular en la posición de la fuente, de forma que la resolución numérica de dicha ecuación ofrece un error muy elevado en ese punto. Por tanto, será interesante eliminar el error causado por la singularidad y poder así aproximar la solución lo mejor posible en ese punto. Esto puede llevarse a cabo principalmente de dos maneras diferentes:

- a) **Refinando la malla de computación en puntos cercanos a la singularidad:** Esto llevaría a una disminución del error de aproximación en el punto singular, aunque al mismo tiempo aumentaría considerablemente el coste computacional del problema. Una posibilidad en esta línea de trabajo sería la aplicación de técnicas *multigrid*, que pueden permitir un refinamiento de la malla mediante la superposición de éstas en diferentes planos (*Moucha and Bailey* [2004], *Tang et al.* [2010]).
- b) **Dividiendo el potencial eléctrico en dos partes:** En este caso, se considera que el potencial eléctrico para el que se está resolviendo el problema tiene dos componentes:

$$\bar{\phi}(\bar{x}) = \bar{\phi}^r(\bar{x}) + \bar{\phi}^s(\bar{x}) \quad (\text{B.1})$$

Donde $\bar{\phi}^r(\bar{x})$ es el potencial regular o no-singular, $\bar{\phi}^s(\bar{x})$ es el potencial singular, es decir, el que recoge la respuesta del potencial a la singularidad y \bar{x} representa las variables de las que depende el potencial eléctrico, en este caso, (x, ω, z) .

El potencial singular $\bar{\phi}^s$ es una cantidad conocida que coincide con el campo de potencial eléctrico en un espacio homogéneo (σ_0 constante), definido por la Ecuación (A.4):

$$\bar{\phi}^s = \frac{I}{2\pi\sigma_0} \mathcal{K}_0 \left(\omega \sqrt{(x - x_0)^2 + z^2} \right) \quad (\text{B.2})$$

Donde, para el potencial singular $\bar{\phi}^s$, σ_0 es tratada como la media de conductividad eléctrica del dominio completo (e.g. *Lowry et al.* [1989]) por simplicidad en la resolución, aunque *Zhao and Yedlin* [1996] definen esta conductividad σ_0 como la conductividad eléctrica local que rodea al medio cercano al punto de inyección.

Esta última, será la forma en la que se basará el algoritmo de eliminación de la singularidad en el punto de inyección que se va a desarrollar. El objetivo de este método será el de calcular el campo de potencial eléctrico pero sin considerar

el efecto de la singularidad, de modo que lo que se busca es resolver el problema para el potencial regular, que no contiene dicho efecto.

A continuación, se presentará la ecuación que regirá el problema teniendo en cuenta la división del potencial eléctrico presentada en la Ecuación (B.1), de modo que, sustituyendo la Ecuación (B.1) en la Ecuación (3.7):

$$-\nabla \cdot \left\{ \sigma(x, z) \vec{\nabla} [\bar{\phi}^r(x, \omega, z) + \bar{\phi}^s(x, \omega, z)] \right\} + \omega^2 \sigma(x, z) [\bar{\phi}^r(x, \omega, z) + \bar{\phi}^s(x, \omega, z)] = \frac{I}{2} \delta(x - x'_0) \delta(z - z'_0) \quad (\text{B.3})$$

De esta forma es posible resolver el problema numérico presentado en la ecuación anterior para el campo de potencial eléctrico regular, siguiendo los mismos pasos que en la sección 3.7. Por lo tanto, teniendo en cuenta que $\sigma_0 \equiv \text{constante}$, la expresión final será la siguiente:

$$-\nabla \cdot \left[\sigma(x, z) \vec{\nabla} \bar{\phi}^r(x, \omega, z) \right] + \omega^2 \sigma(x, z) \bar{\phi}^r(x, \omega, z) = \nabla \cdot \left\{ [\sigma(x, z) - \sigma_0] \vec{\nabla} \bar{\phi}^s(x, \omega, z) \right\} - \omega^2 [\sigma(x, z) - \sigma_0] \bar{\phi}^s(x, \omega, z) \quad (\text{B.4})$$

Es importante remarcar aquí que, para que este método tenga aplicación directa sobre el dominio de estudio, se debe cumplir que éste no sea homogéneo, puesto que de esta forma $\sigma(x, z) = \sigma_0$ y la única solución posible sería la trivial, $\bar{\phi}^r(x, \omega, z) = 0$. Esta idea se tendrá en cuenta en la sección 4.1.2 al aplicar este método a la validación del problema.

Considerando la misma discretización presentada en la Figura 3.3, es posible integrar la Ecuación (B.4) en torno a cada una de las celdas en las que se divide la matriz, con un volumen V_{IJ} , para después, haciendo uso del método de volúmenes finitos, calcular el campo de potencial eléctrico regular, $\bar{\phi}^r$. La ecuación integral viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} & - \int_{V_{IJ}} \nabla \cdot (\sigma(x, z) \vec{\nabla} \bar{\phi}^r) dV + \int_{V_{IJ}} \omega^2 \sigma(x, z) \bar{\phi}^r dV = \\ & \int_{V_{IJ}} \nabla \cdot \left\{ [\sigma(x, z) - \sigma_0] \vec{\nabla} \bar{\phi}^s(x, \omega, z) \right\} dV - \int_{V_{IJ}} \omega^2 [\sigma(x, z) - \sigma_0] \bar{\phi}^s(x, \omega, z) dV \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Para discretizar esta ecuación, se procederá separadamente con cada uno de los lados de la igualdad. Por lo tanto:

– TÉRMINO DE LA IZQUIERDA:

Este término es exactamente el mismo que el término de la izquierda de la Ecuación (3.30), de modo que, tras aplicar el Teorema de Gauss, su expresión discreta vendrá dada por:

$$\begin{aligned} & - \int_{V_{IJ}} \nabla \cdot (\sigma(x, z) \vec{\nabla} \bar{\phi}^r) dV + \int_{V_{IJ}} \omega^2 \sigma(x, z) \bar{\phi}^r dV = \\ & = C_{I,J}(\sigma) \bar{\phi}_{I,J}^r + C_{I-1,J}(\sigma) \bar{\phi}_{I-1,J}^r + C_{I+1,J}(\sigma) \bar{\phi}_{I+1,J}^r + C_{I,J-1}(\sigma) \bar{\phi}_{I,J-1}^r + C_{I,J+1}(\sigma) \bar{\phi}_{I,J+1}^r \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Donde los coeficientes $C_{I,J}(\sigma)$, $C_{I+1,J}(\sigma)$, $C_{I-1,J}(\sigma)$, $C_{I,J+1}(\sigma)$ y $C_{I,J-1}(\sigma)$ están definidos en la Ecuación (3.33), pero, en esta ocasión, en función de σ .

– TÉRMINO DE LA DERECHA:

Este término funcionará de nuevo como un término fuente, aunque no lo es estrictamente. Para conseguir su expresión discreta, se seguirá el mismo procedimiento anterior, contando con que esta vez aparecerá dos veces el mismo coeficiente $C_{I,J}$, pero haciendo referencia una vez a cada conductividad eléctrica de las que aparecen, σ

y σ_0 :

$$\begin{aligned} \int_{V_{IJ}} \nabla \cdot \left\{ [\sigma(x, z) - \sigma_0] \vec{\nabla} \bar{\phi}^s(x, \omega, z) \right\} dV - \int_{V_{IJ}} \omega^2 [\sigma(x, z) - \sigma_0] \bar{\phi}^s(x, \omega, z) dV = \\ [C_{I,J}(\sigma_0) - C_{I,J}(\sigma)] \bar{\phi}_{I,J}^s - [-C_{I-1,J}(\sigma_0) + C_{I-1,J}(\sigma)] \bar{\phi}_{I-1,J}^s - [-C_{I+1,J}(\sigma_0) + C_{I+1,J}(\sigma)] \bar{\phi}_{I+1,J}^s - \\ [-C_{I,J-1}(\sigma_0) + C_{I,J-1}(\sigma)] \bar{\phi}_{I,J-1}^s - [-C_{I,J+1}(\sigma_0) + C_{I,J+1}(\sigma)] \bar{\phi}_{I,J+1}^s \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Donde esta vez, los coeficientes $C_{I,J}(\sigma_0)$, $C_{I+1,J}(\sigma_0)$, $C_{I-1,J}(\sigma_0)$, $C_{I,J+1}(\sigma_0)$ y $C_{I,J-1}(\sigma_0)$, definidos en la Ecuación (3.33), se simplifican de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C_{I-1,J}(\sigma_0) &= -\frac{\Delta z}{\Delta x} \sigma_0 & C_{I+1,J}(\sigma_0) &= -\frac{\Delta z}{\Delta x} \sigma_0 \\ C_{I,J-1}(\sigma_0) &= -\frac{\Delta x}{\Delta z} \sigma_0 & C_{I,J+1}(\sigma_0) &= -\frac{\Delta x}{\Delta z} \sigma_0 \\ C_{I,J}(\sigma_0) &= -C_{I-1,J}(\sigma_0) - C_{I+1,J}(\sigma_0) - C_{I,J-1}(\sigma_0) - C_{I,J+1}(\sigma_0) + \omega^2 \sigma_0 \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

En definitiva, la ecuación completa discretizada para la eliminación de la singularidad en un medio EPM viene expresada como:

$$\begin{aligned} C_{I,J}(\sigma) \bar{\phi}_{I,J}^r + C_{I-1,J}(\sigma) \bar{\phi}_{I-1,J}^r + C_{I+1,J}(\sigma) \bar{\phi}_{I+1,J}^r + C_{I,J-1}(\sigma) \bar{\phi}_{I,J-1}^r + C_{I,J+1}(\sigma) \bar{\phi}_{I,J+1}^r = \\ [C_{I,J}(\sigma_0) - C_{I,J}(\sigma)] \bar{\phi}_{I,J}^s - [-C_{I-1,J}(\sigma_0) + C_{I-1,J}(\sigma)] \bar{\phi}_{I-1,J}^s - [-C_{I+1,J}(\sigma_0) + C_{I+1,J}(\sigma)] \bar{\phi}_{I+1,J}^s - \\ [-C_{I,J-1}(\sigma_0) + C_{I,J-1}(\sigma)] \bar{\phi}_{I,J-1}^s - [-C_{I,J+1}(\sigma_0) + C_{I,J+1}(\sigma)] \bar{\phi}_{I,J+1}^s \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

La utilidad de este método se mostrará en la sección 4.1, donde se validarán los resultados obtenidos para el campo de potencial eléctrico utilizando este método.

C. Apéndice C: Condiciones de Contorno

Como se ha venido explicando a lo largo del documento, la idea de este trabajo es la de simular un experimento de campo real y ser capaz de determinar el campo de resistividad eléctrica presente en el subsuelo a través de una serie de medidas de intensidad de corriente eléctrica y potencial eléctrico. Por tanto, a la hora de fijar las fronteras del modelo, se debe intentar conseguir una definición de las condiciones de contorno que simule la realidad en la medida de lo posible.

En general, los autores que han hecho referencia a este problema coinciden en la definición de condiciones de contorno tipo Neumann para el borde superior, es decir, la separación entre suelo y aire, principalmente debido a la baja conductividad del aire, considerada como $\sigma_{\text{aire}} \approx 0$. Estas condiciones de contorno implicarían que no existe transferencia de flujo de corriente eléctrica entre tierra y aire, de modo que toda la corriente pasa a fluir a través de la tierra, lo que es físicamente correcto y guarda relación con la realidad. Serán las condiciones de contorno que se utilizarán en este trabajo para el borde superior.

Sin embargo, la definición de las condiciones de contorno de los bordes izquierdo, derecho e inferior es algo que ha sido definido de diferentes formas por los diversos autores que tratan el tema. La realidad mostraría que conforme aumenta la distancia a la fuente de inyección, el potencial eléctrico disminuye hasta un punto en el que éste es nulo. Las diferentes formas en las que se podrían definir las condiciones de contorno serían:

(a) Condiciones Dirichlet:

En este caso, las condiciones de contorno utilizadas serán del tipo Dirichlet, es decir, que el potencial eléctrico es cero en los bordes izquierdo, derecho e inferior (e.g. *McGillivray* [1992], *Zhao and Yedlin* [1996]). Esto implica que se fuerza al potencial eléctrico a valer cero en dichos bordes, y lo que se obtendrá por lo tanto no será un comportamiento real del campo de potencial eléctrico.

Esto se debe a que las distancias a las que el potencial eléctrico tendería a cero en la realidad serían distancias muy grandes (grandes dominios) que, para ser modeladas con una suficiente resolución, supondrían grandes y refinadas mallas numéricas, que elevarían considerablemente el coste computacional.

(b) Condiciones Robin:

Este tipo de condiciones, combinación de Dirichlet y Neumann, fueron empleadas por primera vez por *Dey and Morrison* [1979a], aunque posteriormente hicieron uso de ellas *Lowry et al.* [1989] y *Pidlisecky and Knight* [2008] entre otros. Simulaban el comportamiento real del potencial eléctrico en los bordes, es decir, no forzaban al potencial eléctrico a tomar ningún valor específico, sino que únicamente recogen los valores del potencial eléctrico que corresponderían a los bordes establecidos pero como si éstos no existieran, y el dominio de estudio tuviera unas dimensiones mucho mayores. Se trataba de simular el comportamiento asintótico del potencial eléctrico y su primera derivada a largas distancias desde la fuente, donde se esperaba que éste tuviera un valor nulo.

Estas condiciones de contorno, por tanto, garantizan que el potencial tiende a cero cuando la distancia al punto de inyección es suficientemente grande, y además evita el aumento del dominio de estudio para no afectar a los valores del potencial.

Dichos autores desarrollaron este tipo de condiciones en tres dimensiones en primer lugar [Dey and Morrison, 1979a], para luego hacerlo en dos dimensiones en el dominio de Fourier [Dey and Morrison, 1979b]. En el caso de estudio se utilizará este mismo concepto para la definición de las condiciones de contorno de los bordes izquierdo, derecho e inferior, presentando más adelante las ecuaciones pertinentes. Además, se explicará el error cometido por estos autores en dicha definición y se mostrará la definición correcta en la sección 6, donde se plantearán las diferentes pautas a seguir para trabajos futuros en la misma línea.

Estas condiciones de contorno vienen definidas por la siguiente expresión:

$$\alpha(x, \omega, z)\bar{\phi}(x, \omega, z) + \beta(x, \omega, z)\frac{\partial\bar{\phi}(x, \omega, z)}{\partial\vec{n}} = \gamma(x, \omega, z) \quad (\text{C.1})$$

Donde:

$$\begin{aligned} \alpha(x, \omega, z) &\geq 0; & \beta(x, \omega, z) &\geq 0; \\ \alpha(x, \omega, z) + \beta(x, \omega, z) &> 0; & (x, \omega, z) &\in \text{Frontera} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Al igual que en Dey and Morrison [1979b], se utilizarán los valores de $\beta(x, \omega, z) = 1$ y $\gamma(x, \omega, z) = 0$ con la intención de simular unas fronteras situadas infinitamente lejos del punto de inyección.

Asumiendo que el potencial eléctrico a distancias suficientemente grandes de la fuente de corriente así como de cualquier inhomogeneidad viene descrito por la Ecuación (A.4), es posible, obtener una expresión para α que permita definir completamente las condiciones de contorno a utilizar. Para ello, es necesario derivar la Ecuación (A.4) y sustituirla junto a la propia expresión en la definición de las condiciones Robin dada en la Ecuación (C.1), de modo que:

$$\alpha(x, \omega, z) = \omega \frac{\mathcal{K}_1(\omega r)}{\mathcal{K}_0(\omega r)} \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r} \right) \quad (\text{C.3})$$

Donde el término $\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r}$ sirve para determinar la posición de la frontera en cuestión, con \vec{n} y \vec{r} los vectores unitarios en las direcciones x y radial respectivamente, puesto que, al ser un producto escalar, proporcionará un ángulo entre ambos vectores que cambiará en función de la posición en la que se encuentre la frontera (izquierda, derecha o inferior).

Estas condiciones de contorno serán aplicadas al modelo DDP propuesto, tanto en las fronteras de la matriz como en los nodos de las fracturas que se encuentren en los límites del dominio. Para ello se hará uso de un esquema de discretización que utilizará una *celda fantasma*, añadida a continuación de la frontera, que permitirá calcular el valor del potencial eléctrico justo en el borde del dominio, así como la contribución de estas condiciones de contorno a los coeficientes C_{IJ} de la discretización de la matriz, presentados en la Ecuación (3.33). Además, se considerará que el flujo de corriente eléctrica siempre es saliente de la celda en cuestión, de modo que el gradiente se discretizará en esa dirección.

– Frontera izquierda:

Se desarrollará el cálculo de las expresiones necesarias para la frontera izquierda únicamente, puesto que el procedimiento será el mismo para las demás fronteras, aunque las expresiones que resultarán serán diferentes. Por lo tanto:

$$\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x} + \alpha\bar{\phi} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\bar{\phi}_{i-1,j} - \bar{\phi}_{i,j}}{\Delta x} + \alpha\bar{\phi}_F = 0 \quad (\text{C.4})$$

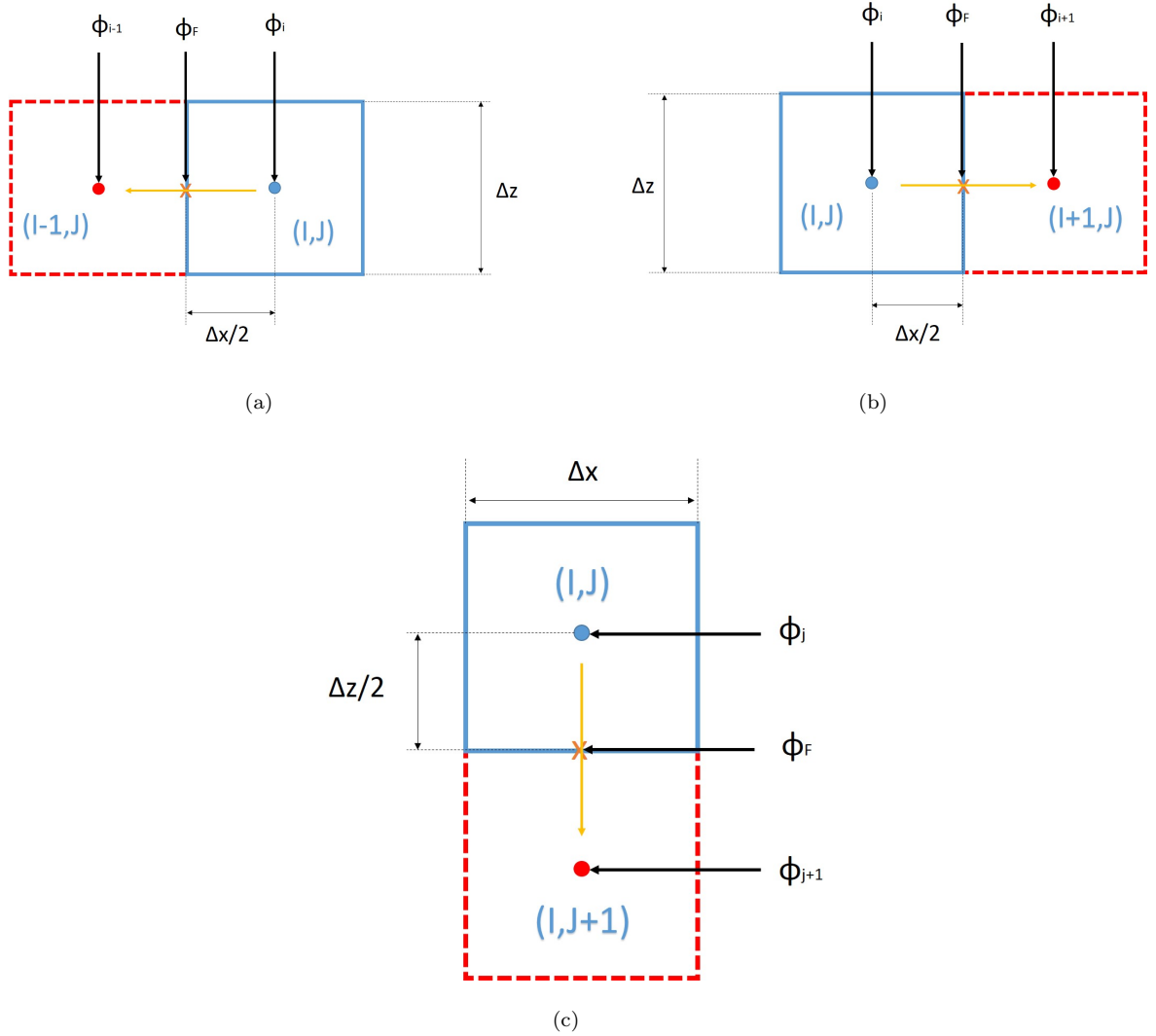


Figura C.0.1: Discretización empleada para las fronteras izquierda (a), derecha (b) e inferior (c) del dominio

Donde $\bar{\phi}_F$ es el valor del potencial eléctrico en la frontera, que se define como el valor medio entre la celda de estudio y la fantasma:

$$\bar{\phi}_F = \frac{\bar{\phi}_{i-1,j} + \bar{\phi}_{i,j}}{2} \quad (\text{C.5})$$

Usando esta expresión y evaluando el potencial eléctrico en la celda fantasma ($\bar{\phi}_{i,j-1}$), sería posible calcular el valor del potencial eléctrico en la frontera ($\bar{\phi}_F$), de forma que únicamente dependa del valor del potencial en la celda (I,J) ($\bar{\phi}_{i,j}$):

$$\bar{\phi}_{i-1,j} = \frac{2 - \alpha \Delta x}{2 + \alpha \Delta x} \bar{\phi}_{i,j} \quad (\text{C.6})$$

$$\bar{\phi}_F = \frac{2}{2 + \alpha \Delta x} \bar{\phi}_{i,j} \quad (\text{C.7})$$

Este valor de $\bar{\phi}_F$ será el que definirá las condiciones de contorno de los nodos de las fracturas cuando éstos se encuentren en la frontera izquierda de la matriz.

Esta definición de las condiciones de contorno implica además una modificación de los coeficientes definidos en la sección 3.7, puesto que al imponer un valor en la frontera, el coeficiente de dicha frontera desaparecerá (puesto que no hay potencial eléctrico en dicha dirección) y la contribución de la condición de contorno definida en la Ecuación (C.7) repercutirá al coeficiente central, pasando éste a ser:

$$C_{i,j} = 2\sigma\Delta z \left(\frac{\alpha}{2 + \alpha\Delta x} \right) \quad (\text{C.8})$$

– **Frontera derecha:**

Ahora la celda fantasma se situará en el lado opuesto, aunque las expresiones son las mismas:

$$\bar{\phi}_{i+1,j} = \frac{2 - \alpha\Delta x}{2 + \alpha\Delta x} \bar{\phi}_{i,j} \quad (\text{C.9})$$

$$\bar{\phi}_F = \frac{2}{2 + \alpha\Delta x} \bar{\phi}_{i,j} \quad (\text{C.10})$$

$$C_{i,j} = 2\sigma\Delta z \left(\frac{\alpha}{2 + \alpha\Delta x} \right) \quad (\text{C.11})$$

– **Frontera inferior:**

En esta ocasión, la celda fantasma se localizará por debajo de la última celda en la frontera inferior. Las expresiones serán similares a las anteriores, aunque no idénticas:

$$\bar{\phi}_{i,j-1} = \frac{2 - \alpha\Delta z}{2 + \alpha\Delta z} \bar{\phi}_{i,j} \quad (\text{C.12})$$

$$\bar{\phi}_F = \frac{2}{2 + \alpha\Delta z} \bar{\phi}_{i,j} \quad (\text{C.13})$$

$$C_{i,j} = 2\sigma\Delta x \left(\frac{\alpha}{2 + \alpha\Delta z} \right) \quad (\text{C.14})$$

Es importante remarcar que estas condiciones de contorno presentan una fuerte dependencia con la distancia de la frontera hasta el punto de inyección, denotado por el término r que aparece en la Ecuación (C.3). Esta es la razón por la cual no es posible la aplicación de las condiciones de contorno explicadas en esta sección en simultaneidad con la existencia de dos fuentes/receptores de corriente sobre la superficie terrestre, puesto que esta distancia no estaría definida de la misma forma en este caso.

D. Apéndice D: Códigos

En esta sección simplemente se ha querido dejar constancia de los diferentes códigos utilizados en la implementación del modelo a nivel general, desde los códigos utilizados en Matlab[®] hasta aquellos generados en Matlab[®] pero aplicados en COMSOL Multiphysics[®]. El código utilizado para el cálculo de la solución en C++ no es posible facilitarlo en este proyecto debido a que su propiedad está protegida. A continuación se presentan aquellos códigos que han intervenido de una forma u otra en el desarrollo del presente estudio.

1. Códigos Matlab[®]

Listing 1: *Fourier_Pot.m*

```
1
2 function [Pot1] = Fourier_Pot(sigma,I,Lsimu,Nx,x_0)
3 % This function calculates the Fourier potential and the inverse one trough different methods ...
4   using the Fourier inversion computed in Inverse_Pot.m
5
6 %Víctor Caballero:
7 %creado: agosto de 2014, última modificación enero 2015
8 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
9
10 %----- Standard Inverse Fourier -----%
11 % N = 1000;
12 % T = 1000;
13 %Furthermore, the wavenumbers have to fulfill that the space between them
14 %will be always the same (pi/T).
15 % wk = linspace(pi/T,pi*N/T,N);
16
17 %----- Xu et al. coefficients -----%
18 wk = [0.0217102 0.2161121 1.0608400 5.0765870];
19 g = [0.0463660 0.2365931 1.0382080 5.3648010];
20
21 Nz = Nx;
22 dx = Lsimu/Nx;
23 dz = Lsimu/Nz;
24
25 x = linspace(0,Lsimu - dx,Nx) + dx/2;
26 z = linspace(0,Lsimu - dz,Nz) + dz/2;
27
28 N = length(wk);
29 k = 1:N; %vector which goes over the wavenumber values
30
31 [X,Z,Wk] = meshgrid(x,z,wk);
32
```

```

33 a = (X - x_0).^2 + Z.^2;
34 disp('Creating the matrix potential for all wavenumbers');
35 tic;
36 F_Pot1(:, :, k) = (I/(2*pi*sigma)).*besselk(0,Wk(:, :, k).*sqrt(a)); % Maximun value at the top
37 toc;
38
39 % F_Pot = flipud(F_Pot1(:, :, k)); %% Just for plotting
40
41 % v = 0:1000:20000;
42 % figure(1);
43 % % surf(F_Pot(:, :, 1));
44 % % pcolor(x, z, F_Pot(:, :, 1));
45 % % shading interp;
46 % [C, h] = contourf(F_Pot(:, :, 1), v);
47 % clabel(C, h);
48 % colorbar;
49 %
50 % figure(2);
51 % plot(x, F_Pot1(1, :, 1), 'ob');
52
53
54 %% Inverse Potential %%
55 Pot1 = Inverse_Pot(F_Pot1, Nz, Nx, N, x_0, g);
56
57 % Pot = flipud(Pot1(:, :, 1));
58 % figure(3);
59 % % % surf(x, z, u(:, :));
60 % % % pcolor(u(:, :));
61 % % % shading interp;
62 % [C, h] = contourf(x, z, Pot(:, :, 1), v);
63 % clabel(C, h);
64 % colorbar;
65
66 % figure(4);
67 % plot(x, Pot1(1, :, 1), 'r');
68 % legend('2.5D Solution');
69
70 end

```

Listing 2: *Inverse _Pot.m*

```

1
2 function Potential = Inverse_Pot(F_Pot,Nz,Nx,N,c_l,g)
3 %This function calculates the inverse potential from a matrix using N wavenumbers to do it.
4
5 %Víctor Caballero:
6 %creado: agosto de 2014, última modificación enero 2015
7 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8
9 if N > 20; % more than the optimized number
10     %% Typical inverse potential using at least 1000 wavenumbers
11     T = 100;
12     F = ndims(F_Pot);
13     if F ~= 2
14         %Transformation vector between both transforms
15         %(see base_discretization_idct)
16         trans = ones(Nz,Nx,N);
17
18         trans(:, :, 1) = trans(:, :, 1)*sqrt(N);
19         trans(:, :, 2:N) = trans(:, :, 2:N)*sqrt(N/2);
20         F_Pot = F_Pot.*trans;
21
22         %Multiplying the transformation vector by the transform potential, we can
23         %avoid the addition of the idct constant in the next step
24         %We have to do the transform in each vector of the third dimension, that
25         %is, taking the vectors in depth
26         tic;
27         disp('Applying inverse transform');
28         Potential = zeros(Nz,Nx,N);
29         for i = 1:Nz
30             for j = 1:Nx
31                 c = idct(F_Pot(i,j,:));
32                 for h = 1:N
33                     Potential(i,j,h) = Potential(i,j,h) + c(1,h);
34                 end
35             end
36         end
37         toc;
38         %In order to normalize the idct with the analytical solution, we have to
39         %multiply by 2/T.
40         Potential = Potential*2/T;
41     else
42         trans = ones(N,Nx);
43         trans(1,:) = trans(1,:)*sqrt(N);
44         trans(2:N,:) = trans(2:N,:)*sqrt(N/2);
45         F_Pot = F_Pot.*trans;

```

```

46     tic;
47     disp('Applying inverse transform');
48     Potential = zeros(N,Nx);
49     for i = 1:Nx
50         c = idct(F_Pot(:,i));
51         Potential(:,i) = Potential(:,i) + c;
52     end
53     toc;
54     Potential = Potential.*2/T;
55 end
56
57
58 else
59     %% Optimized inverse potential%%
60     % We are going to develop the inversion using either the Xu,Duan and Zhang or
61     % Pidlisecky optimized wavenumbers and Fourier weights. This inverse potential
62     % is suitable just when we have an injection point, if not, we need to use the
63     % standard one
64
65     % Potential is a 4-D Matrix for inverting matrix potential with lots of
66     % experiments, and it is a 3-D Matrix for inverting matrix potential with just one
67     % experiment
68
69     F = ndims(F_Pot);
70     disp('Applying inverse transform');
71     if F == 2
72         Potential = zeros(1,size(F_Pot,2));
73         for k = 1:N
74             Potential(1,:) = Potential(1,:) + F_Pot(k,:);
75         end
76     else
77         p = 1:length(c_1);
78         Potential = zeros(Nz,Nx,1,length(c_1));
79         for k = 1:N
80             Potential(:, :, 1, p) = Potential(:, :, 1, p) + F_Pot(:, :, k, p).*g(k);
81         end
82     end
83
84     % This inversion just takes into account the first plane of the 2.5D
85     % solution in the spatial domain, not the whole 3D domain (cube).
86 end
87 end

```

Listing 3: *Inhom_Fourier.m*

```

1
2 function [Pot2] = Inhom.Fourier(Nx,Lsimu,I,pt,sigma_1,sigma_2,x_0)
3 % This function calculates the 2.5D analytical solution in the Fourier domain considering the ...
   % two-layer case with different conductivity in each layer and it compares the solution ...
   % with the solution for an homogeneous domain
4
5 %V ctor Caballero:
6 %creado: agosto de 2014, última modificación enero 2015
7 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
8
9 Nz = Nx;
10 dx = Lsimu/Nx;
11 dz = Lsimu/Nz;
12
13
14 x = linspace(0,Lsimu-dx,Nx) + dx/2;
15 z = linspace(0,Lsimu-dz,Nz) + dz/2;
16
17 % Standard wavenumbers
18 % N = 1000;
19 % T = 100;
20 % wk = linspace(pi/T,N*pi/T,N);
21
22 % Xu et al. coefficients
23 wk = [0.0217102 0.2161121 1.0608400 5.0765870];
24 g = [0.0463660 0.2365931 1.0382080 5.3648010];
25
26 n = 1:length(wk); %% Dimension associated with wavenumbers
27 N = length(wk);
28 [X,Z,Wk] = meshgrid(x,z,wk);
29
30 a = (X - x_0).^2 + Z.^2;
31
32 A = zeros(Nz,Nx,N);
33 p = pt*Lsimu; %% Thickness of the top layer
34 k = (sigma_1 - sigma_2)/(sigma_1 + sigma_2); %% reflexion coefficient
35 m = 0;
36 while m < 10
37     m = m + 1;
38     A(:, :, n) = A(:, :, n) + (I/(pi*sigma_1)).*k.^m).*besselk(0,Wk(:, :, n).*sqrt((X - ...
        Lsimu/2).^2 + Z.^2 + (2*m*p)^2));
39 end
40
41 %% Analytical solution: F_Pot1--normal; F_Pot2--singular
42 % F_Pot1 = (I/(2*pi*sigma)).*besselk(0,Wk(:, :, n).*sqrt(a));

```

```

43 F_Pot2 = (I/(2*pi*sigma_1)).*besselk(0,Wk(:, :, n).*sqrt(a)) + A(:, :, n);
44
45 % figure(1);
46 % plot(x,F_Pot1(1, :, 4), 'r');
47 % hold on;
48 % plot(z,F_Pot2(1, :, 4), '*b');
49 % hold off;
50
51 %% -----Inverse Potential----- %%
52
53 % Pot1 = Inverse_Pot(F_Pot1,Nz,Nx,N,x_0,g);
54 Pot2 = Inverse_Pot(F_Pot2,Nz,Nx,N,x_0,g);
55
56 % figure(2);
57 % plot(x,Pot2(1, :, 1), 'r');
58 % hold on;
59 % plot(x,Pot1(1, :, 1), '*r');
60 % hold off;
61 end

```

Listing 4: *A_Sol_3D.m*

```

1
2 % Este script calcula la solución analítica en 3D para un dominio homogéneo utilizada para ...
   comprobar los errores introducidos por la transformación inversa de Fourier.
3
4 %Víctor Caballero:
5 %creado: agosto de 2014, última modificación enero 2015
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7 L = 30;
8 Lsimu = 1*L;
9 Nx = 101;
10 Ny = 101;
11 Nz = 101;
12 dx = Lsimu/Nx;
13 dy = Lsimu/Ny;
14 dz = Lsimu/Nz;
15
16 I = 10;
17 sigma = 1e-1;
18
19 x = linspace(0,Lsimu-dx,Nx) + dx/2;
20 y = linspace(0,Lsimu-dy,Ny) + dy/2;
21 z = linspace(0,Lsimu-dz,Nz) + dz/2;
22
23 %s = [0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9.5];
24 % c_1 = Lsimu/2 - 3*s/2; % Position for a lot of expermients
25 % c_2 = c_1 + 3*s; % Position of the second source for each experiment
26 s = 3;
27 c_1 = 10.5;
28 c_2 = c_1 + 3*s;
29
30 for r = 1:length(c_1)
31     [a,index_c_1] = min(abs(c_1(r)-x));
32     [b,index_c_2] = min(abs(c_2(r)-x));
33
34     c_1(r) = x(index_c_1);
35     c_2(r) = x(index_c_2);
36 end
37
38 [X,Z,Y,C_1] = ndgrid(x,z,y,c_1);
39 C_2 = ones(Nx,Nz,Ny,length(c_2));
40 for r = 1:length(c_2)
41     C_2(:, :, :, r) = C_2(:, :, :, r) .* c_2(r);
42 end
43
44 r1 = sqrt((X - C_1).^2 + Y.^2 + Z.^2);

```



```

45 r2 = sqrt((X - C_2).^2 + Y.^2 + Z.^2);
46 V2 = (I/(2*pi*sigma)).*1./r1;
47 V3 = (-I/(2*pi*sigma)).*1./r2;
48 V = V2 + V3;
49 V = permute(V,[2 1 3 4]); % Just for plotting
50
51 figure(2);
52 l(1) = plot(x,V(1,:),1,1),'--gs');
53 set(l(1),'Markersize',4);
54
55 %% Apparent resistivity data generation %%
56
57 %%----- Data generation -----%%
58
59 % % s == spacing between electrodes. Using Wenner array, that spacing is the
60 % % same between potential electrodes as current and potential electrodes.
61
62 x_M = c_1 + s;
63 x_N = c_1 + 2*s;
64
65 for r = 1:length(c_1)
66     [v,index_M] = min(abs(x_M(r)-x));
67     [w,index_N] = min(abs(x_N(r)-x));
68
69     x_M(r) = x(index_M);
70     x_N(r) = x(index_N);
71 end
72
73 K = 2*pi*s; % Geometrical factor for Wenner array
74
75 N_M = ceil(x_M/dx);
76 N_N = ceil(x_N/dx);
77 Delta_V = zeros(1,length(c_1));
78
79 for t = 1:length(c_1)
80     Delta_V(t) = Delta_V(t) + V(1,N_M(t),1,t) - V(1,N_N(t),1,t); % We just need to calculate
81     % the potential difference at surface and for the first row of the third
82     % dimension
83 end
84 App.res = (Delta_V/I).*K;
85 Rel.err = abs(((1/sigma) - App.res)/(1/sigma))*100;
86
87
88 %% Results %%
89
90 % Apparent resistivity plot

```

```

91
92 % error = (1/sigma) - App_res;
93 % lower = zeros(1,length(s));
94 % upper = zeros(1,length(s));
95 % for q = 1:length(s)
96 %     if error(q) > 0
97 %         lower(q) = 0;
98 %         upper(q) = error(q);
99 %     elseif error(q) < 0
100 %         lower(q) = error(q);
101 %         upper(q) = 0;
102 %     end
103 % end
104
105 % figure(2);
106 % plot(s,App_res,'-.g*');
107 % hold on;
108 % errorbar(s,App_res,lower,upper,'rx');
109
110 % figure(3);
111 % plot(s,Rel_err,'-.r*');

```

Listing 5: *Inhom_A_Sol_3D.m*

```

1  % Este script calcula la solución analítica en 3D para un dominio inhomogéneo utilizada para ...
   comprobar los errores introducidos por la transformación inversa de Fourier.

2

3  %Víctor Caballero:
4  %creado: agosto de 2014, última modificación enero 2015
5  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6
7  L = 30;
8  Lsimu = 1*L;
9  Nx = 101;
10 Ny = 101;
11 Nz = 101;
12 dx = Lsimu/Nx;
13 dy = Lsimu/Ny;
14 dz = Lsimu/Nz;
15
16 I = 10;
17 sigma_1 = 1e-3;
18 sigma_2 = 100e-3;
19
20 x = linspace(0,Lsimu-dx/2,Nx) + dx/2;
21 y = linspace(0,Lsimu-dy/2,Ny) + dy/2;
22 z = linspace(0,Lsimu-dz/2,Nz) + dz/2;
23
24 % s = [0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9.5];
25 % c_1 = Lsimu/2 - 3*s/2; % Position for a lot of expermients
26 % c_2 = c_1 + 3*s; % Position of the second source for each experiment
27 s = 3;
28 c_1 = 10.5;
29 c_2 = c_1 + 3*s;
30
31 for r = 1:length(c_1)
32     [a,index_c_1] = min(abs(c_1(r)-x));
33     [b,index_c_2] = min(abs(c_2(r)-x));
34
35     c_1(r) = x(index_c_1);
36     c_2(r) = x(index_c_2);
37 end
38
39 [X,Z,Y,C_1] = ndgrid(x,z,y,c_1);
40 C_2 = ones(Nx,Nz,Ny,length(c_2));
41 for r = 1:length(c_2)
42     C_2(:, :, :, r) = C_2(:, :, :, r) .* c_2(r);
43 end
44

```

```

45
46 A1 = zeros(Nz,Nx,Ny);
47 A2 = zeros(Nz,Nx,Ny);
48 pt = 0.3;
49 p = pt*Lsimu;
50 m = 0;
51 k = (sigma_1 - sigma_2)/(sigma_1 + sigma_2);
52 r1 = sqrt((X - C_1).^2 + Y.^2 + Z.^2);
53 r2 = sqrt((X - C_2).^2 + Y.^2 + Z.^2);
54 while m < 100
55     m = m + 1;
56     A1 = A1 + (I./(pi*sigma_1*r1)).*(k^(m))./sqrt(1 + (2*m*p./r1).^2);
57     A2 = A2 + (-I./(pi*sigma_1*r2)).*(k^(m))./sqrt(1 + (2*m*p./r2).^2);
58
59 end
60
61 V2 = (I/(2*pi*sigma_1)).*1./r1 + A1;
62 V3 = (-I/(2*pi*sigma_1)).*1./r2 + A2;
63 V = V2 + V3;
64 V = permute(V,[2 1 3 4]); % Just for plotting
65
66 figure(2);
67 l(1) = plot(x,V(1,:),1,1),'--gs');
68 set(l(1),'Markersize',4);
69
70
71 %% Apparent resistivity data generation %%
72
73 %%----- Data generation -----%%
74
75 % % s == spacing between electrodes. Using Wenner array, that spacing is the
76 % % same between potential electrodes as current and potential electrodes.
77
78 x_M = c_1 + s;
79 x_N = c_1 + 2*s;
80
81 for r = 1:length(c_1)
82     [v,index_M] = min(abs(x_M(r)-x));
83     [w,index_N] = min(abs(x_N(r)-x));
84
85     x_M(r) = x(index_M);
86     x_N(r) = x(index_N);
87 end
88
89 K = 2*pi*s; % Geometrical factor for Wenner array
90

```

```

91 N_M = ceil(x_M/dx);
92 N_N = ceil(x_N/dx);
93 Delta_V = zeros(1,length(c_1));
94
95 for t = 1:length(c_1)
96     Delta_V(t) = Delta_V(t) + V(1,N_M(t),1,t) - V(1,N_N(t),1,t); % We just need to calculate
97     % the potential difference at surface and for the first row of the third
98     % dimension
99 end
100 App_res = (Delta_V/I).*K;
101 Rel_err = abs((1/sigma) - App_res)/(1/sigma))*100;
102
103
104 %% Results %%
105
106 % Apparent resistivity plot
107
108 % error = (1/sigma) - App_res;
109 % lower = zeros(1,length(s));
110 % upper = zeros(1,length(s));
111 % for q = 1:length(s)
112 %     if error(q) > 0
113 %         lower(q) = 0;
114 %         upper(q) = error(q);
115 %     elseif error(q) < 0
116 %         lower(q) = error(q);
117 %         upper(q) = 0;
118 %     end
119 % end
120
121 % figure(2);
122 % plot(s,App_res,'-.g*');
123 % hold on;
124 % errorbar(s,App_res,lower,upper,'rx');
125
126 % figure(3);
127 % plot(s,Rel_err,'-.r*');

```

Listing 6: *Data_Gen.m*

```

1 function [File_matrix,c_1] = Data_Gen(option,s,x_0)
2 %%option means if we want to implement the Homogeneous, Inhomogeneous or
3 %%Code case in order to generate the synthetic data for the preliminar model
4 %%to invert it
5 %%option == 1 -- Homogeneous case
6 %%option == 2 -- Inhomogeneous case
7 %%option == 3 -- Code matrix
8 %%s is the spacing between potential electrodes
9 %%x_0 is the position of the first positive source
10
11 % Esta función genera un archivo .dat con la información referente a la distribución vertical ...
12     de resistividad aparente de un único experimento de campo.
13
14 %Víctor Caballero:
15 %creado: agosto de 2014, última modificación enero 2015
16 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
17 sigma = 1e-3;
18 I = 10;
19 Lsimu = 300;
20 Nx = 301;
21 Nz = 301;
22 dx = Lsimu/Nx;
23 dz = Lsimu/Nz;
24
25 x = linspace(0,Lsimu - dx,Nx) + dx/2;
26 z = linspace(0,Lsimu - dz,Nz) + dz/2;
27
28 % Xu and Zhang optimized wavenumbers and weigths
29 wk = [0.02217102 0.2161121 1.0608400 5.0765870]; % Optimized wavenumbers
30 g = [0.0463660 0.2365931 1.0382080 5.3648010]; % Optimized Fourier weights
31
32 % c_1 = x_0:s:Lsimu-4*s; % Position of the first source for each experiment
33 c_1 = x_0:x_0:Lsimu-3*s-x_0; % Position for a lot of experments
34 c_2 = c_1 + 3*s; % Position of the second source for each experiment
35
36 N = length(wk);
37 % Bubble method to order wk and g vectors, because in the C++ Code we have
38 % them in increasing order
39 for i = 1:N
40     for j = i+1:N
41         if wk(j) < wk(i)
42             temp_w = wk(i);
43             wk(i) = wk(j);
44             wk(j) = temp_w;

```

```

45
46         temp_g = g(i);
47         g(i) = g(j);
48         g(j) = temp_g;
49     end
50 end
51 end
52
53 % Optimization method in order to take into account the position of the
54 % first and second sources as the same as the x vector, avoiding then changes in
55 % resistivity values
56 for r = 1:length(c_1)
57     [t,index_c_1] = min(abs(c_1(r)-x));
58     [u,index_c_2] = min(abs(c_2(r)-x));
59
60     c_1(r) = x(index_c_1);
61     c_2(r) = x(index_c_2);
62 end
63
64 i = 1:Nz; %% x index
65 j = 1:Nx; %% z index
66 n = 1:length(wk); %% Third dimension index, related to wavenumbers
67 p = 1:length(c_1); %% experiment index
68
69 if option == 1||option == 2
70
71     % Creation of the grid, just for the analytical solutions
72     [Z,X,Wk,C_1] = ndgrid(z,x,wk,c_1);
73     % Creating the second source matrix
74     C_2 = ones(Nz,Nx,N,length(c_2));
75     for r = 1:length(c_2)
76         C_2(:,:,r) = C_2(:,:,r)*c_2(r);
77     end
78
79     if option == 1
80
81         %%----- Homogeneous Fourier Potential -----%%
82         tic;
83         disp('Creating the potential matrix for all the experiments');
84         F_Pot1(:,:,n,p) = (I/(2*pi*sigma)).*besselk(0,Wk(:,:,n,p)).*sqrt((X - C_1).^2 + Z.^2));
85         F_Pot2(:,:,n,p) = (-I/(2*pi*sigma)).*besselk(0,Wk(:,:,n,p)).*sqrt((X - C_2).^2 + Z.^2));
86         F_Pot = F_Pot1 + F_Pot2; %% Maximun at the top
87         toc;
88     else
89
90         %%----- Inhomogeneous Fourier Potential -----%%

```

```

91
92     % Extra parameters for inhomogeneities
93     pt = 0.3; %% Percentage of thickness of the top layer
94     sigma_2 = 100e-3;
95
96     tic;
97     disp('Creating the potential matrix for all the experiments');
98     A_1 = zeros(Nz,Nx,N,length(c_1));
99     A_2 = zeros(Nz,Nx,N,length(c_1));
100     l = pt*Lsimu; %% Thickness of the top layer
101     k = (sigma - sigma_2)/(sigma + sigma_2); %% reflexion coefficient
102     m = 0;
103     while m < 10
104         m = m + 1;
105         A_1(:, :, n, p) = A_1(:, :, n, p) + ...
            (I/(pi*sigma)).*k.^m.*besselk(0,Wk(:, :, n, p).*sqrt((X - C_1).^2 + Z.^2 + ...
            (2*m*1)^2));
106         A_2(:, :, n, p) = A_2(:, :, n, p) + ...
            (I/(pi*sigma)).*k.^m.*besselk(0,Wk(:, :, n, p).*sqrt((X - C_2).^2 + Z.^2 + ...
            (2*m*1)^2));
107     end
108
109     F_Pot1(:, :, n, p) = (I/(2*pi*sigma)).*besselk(0,Wk(:, :, n, p).*sqrt((X - C_1).^2 + Z.^2)) ...
        + A_1(:, :, n, p);
110     F_Pot2(:, :, n, p) = (-I/(2*pi*sigma)).*besselk(0,Wk(:, :, n, p).*sqrt((X - C_2).^2 + ...
        Z.^2)) - A_2(:, :, n, p);
111     F_Pot = F_Pot1 + F_Pot2; %% Maximun at the top
112     toc;
113 end
114
115 elseif option == 3
116
117     %%----- Fourier Potential -----%%
118
119     F_Pot_C_1 = zeros(Nz,Nx,N,length(c_1));
120     F_Pot_C_2 = zeros(Nz,Nx,N,length(c_1));
121
122     for r = 1:length(c_1)
123         disp('Reading the file');
124         S = load(['Matrix.Potential' num2str(r) '.txt']); %% reading each file with a 3D matrix
125         F_Pot1 = zeros(Nz,Nx,N);
126
127         disp(['Creating the potential matrix from C++ code for experiment number' num2str(r)]);
128         for h = 0:N-1
129             F_Pot1(i, j, h+1) = F_Pot1(i, j, h+1) + S(i+h*Nz, j);
130             % Maximun at the last column

```



```

131     end
132     % Changing the dimensions in order to invert the matrix then
133     F_Pot1 = permute(F_Pot1,[2 1 3]);
134     % Replacing NaNs and negative and small values for 0s
135     F_Pot1(isnan(F_Pot1)) = 0;
136     F_Pot1(F_Pot1 < 0) = 0;
137     % And "transposing" that matrix
138     F_Pot2 = fliplr(-F_Pot1);
139     % Storing both matrices in different 4D matrices
140     F_Pot_C.1(:,:, :,r) = F_Pot_C.1(:,:, :,r) + F_Pot1(:,:, :);
141     % The matrix of the second sources is stored in inverse order
142     F_Pot_C.2(:,:, :,length(c_1)+1-r) = F_Pot_C.2(:,:, :,length(c_1)+1-r) + F_Pot2(:,:, :);
143 end
144
145 % Creating a 4D matrix to store all those 3D matrices
146 F_Pot = flipud(F_Pot_C.1 + F_Pot_C.2);
147
148 else
149     disp('Error in "Data.Gen": case not implemented');
150     return;
151 end
152
153 % Plotting the results
154 % figure(1);
155 % v = -5000:500:5000;
156 % F_Pot_plot = flipud(F_Pot(:,:,n,p)); %% Just for plotting
157 % [C,h] = contourf(x,z,F_Pot_plot(:,:,1,1));
158 % clabel(C,h);
159 % colorbar;
160 %
161 % figure(2);
162 % plot(x,F_Pot(1,:,1,1),'b');
163
164 %%----- Inverse Potential -----%%
165
166 Pot = Inverse_Pot(F_Pot(:,:, :,p),Nz,Nx,N,c_1,g); %% Maximun at the top
167
168 % figure(3);
169 % v = -10000:1000:10000;
170 % Pot_plot = flipud(Pot(:,:,1,p)); %% Just for plotting
171 % [C,h] = contourf(x,z,Pot_plot(:,:,1,1),v);
172 % clabel(C,h);
173 % colorbar;
174 %
175 % figure(4);
176 % plot(x,Pot(1,:,1,10),'r');

```

```

177
178 %%----- Data generation -----%%
179
180 % s == spacing between electrodes. Using Wenner array, that spacing is the
181 % same between potential electrodes and current and potential electrodes.
182
183 K = 2*pi*s; % Geometrical factor for Wenner array
184
185 x_M = c_1 + s;
186 x_N = c_1 + 2*s;
187
188 for r = 1:length(c_1)
189     [v,index_M] = min(abs(x_M(r)-x));
190     [w,index_N] = min(abs(x_N(r)-x));
191
192     x_M(r) = x(index_M);
193     x_N(r) = x(index_N);
194 end
195
196 N_M = ceil(x_M/dx);
197 N_N = ceil(x_N/dx);
198 Delta_V = zeros(1,length(c_1));
199
200 for t = 1:length(c_1)
201     Delta_V(t) = Delta_V(t) + Pot(1,N_M(t),1,t) - Pot(1,N_N(t),1,t); % We just need to calculate
202     % the potential difference at surface and for the first row of the third
203     % dimension
204 end
205 App_res = (Delta_V/I)*K;
206 x_loc = x_M + s/2; % x positions of the mid point
207 s_vec = ones(1,length(x_loc))*s; % vector with electrodes spacing
208
209 File_matrix = [x_loc; s_vec; App_res(1,:,1)];
210
211 % Adding information to the txt file for Res2DInv
212 fileID = fopen('Inversion_test.dat','w');
213 fprintf(fileID,'%20s\n','INVERSION TEST'); % Name of the survey
214 fprintf(fileID,'%2.2f\n',s); % Spacing between electrodes
215 fprintf(fileID,'%1.0f\n',1); % Array type
216 fprintf(fileID,'%6f\n',length(c_1)); % Number of data points
217 fprintf(fileID,'%1.0f\n',1); % Type of x-location for data points
218 fprintf(fileID,'%1.0f\n',0); % Flag for I.P. data
219 fprintf(fileID,'%3.3f %3.3f %5.5f\n',File_matrix); % Data points
220 fprintf(fileID,'%1.0f\n',0); % Ends with a few zeros. Flags for other options
221 fprintf(fileID,'%1.0f\n',0);
222 fprintf(fileID,'%1.0f\n',0);

```

```
223     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 0);  
224     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 0);  
225     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 0);  
226     fclose(fileID);  
227  
228 end
```

Listing 7: *Res2DInv_Data_Gen.m*

```

1
2 % Este script genera un archivo .dat con la información referente a la distribución de ...
   resistividad aparente para diferentes experimentos con diferentes espaciamentos de los ...
   electrodos, de forma que dicho archivo sirve como entrada para el cálculo del campo de ...
   resistividad real del subsuelo mediante el software Res2DInv.
3
4 %Víctor Caballero:
5 %creado: agosto de 2014, última modificación enero 2015
6 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7
8
9 option = 1; %Option --> A. homogeneous/A. inhomogeneous/C++ solution
10 x_0 = 6; % First source position
11 Lsimu = 300; % Length of the domain
12
13 fileID = fopen('Inversion.test.300.6.dat','w');
14     fprintf(fileID, '%20s\n', 'INVERSION TEST'); % Name of the survey
15     fprintf(fileID, '%2.2f\n', x_0); % Spacing between electrodes
16     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 1); % Array type
17     fprintf(fileID, '%6f\n', 2); % Number of data points
18     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 1); % Type of x-location for data points
19     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 0); % Flag for I.P. data
20 fclose(fileID);
21
22 exp_nb = 0; % count
23 for s = x_0:x_0:(Lsimu-2*x_0)/3;
24     [File_matrix, c_1] = Data_Gen(option, s, x_0);
25     fileID = fopen('Inversion.test.300.6.dat', 'a');
26     fprintf(fileID, '%3.3f %3.3f %5.5f\n', File_matrix); % Data points
27     fclose(fileID);
28     exp_nb = exp_nb + length(c_1);
29 end
30
31 fileID = fopen('Inversion.test.300.6.dat', 'a');
32     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 0); % End with a few zeros. Flasgs for other options
33     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 0);
34     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 0);
35     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 0);
36     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 0);
37     fprintf(fileID, '%1.0f\n', 0);
38     A = regexp(fileread('Inversion.test.300.6.dat'), '\n', 'split');
39     A{4} = sprintf('%d', exp_nb);
40     fid = fopen('Inversion.test.300.6.dat', 'w');
41     fprintf(fid, '%s\n', A{:});
42     fclose(fid);

```

```
43 fclose(fileID);
```

2. Códigos Matlab®– COMSOL®

Listing 8: *Parallel_fracts.m*

```
1
2 %Víctor Caballero:
3 %creado: agosto de 2014, última modificación enero 2015
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5 function out = model
6
7 import com.comsol.model.*
8 import com.comsol.model.util.*
9
10 % initial set of up model
11 model = ModelUtil.create('Parallel_fracts_3D');
12 model.modelPath('H:\Trabajos\Ingenieria Industrial\Internship\Workspace COMSOL\Parallel_fracts');
13 model.modelNode.create('mod1');
14 model.geom.create('geom1', 3);
15 model.mesh.create('mesh1', 'geom1');
16 model.physics.create('ec', 'ConductiveMedia', 'geom1');
17 model.study.create('std1');
18 model.study('std1').feature.create('stat', 'Stationary');
19 model.study('std1').feature('stat').activate('ec', true);
20
21 % define the geometry, and boundary conditions
22
23 % set the repair tolerance to be a bit lower than the default value % to account for limited ...
    significant figures in the text files that % Delphine sent me
24 model.geom('geom1').feature('fin').set('repairtol', '1.0E-10');
25
26 % create fractures from data in Delphine's text file and make union
27 temp = textread('Parallel_fracts.5.txt');
28 nfrac=size(temp,1);
29 for i=1:nfrac;
30     name=['fr',num2str(i)];
31     fracset{i}=name;
32     posx=temp(i,1)*3;
33     posy=temp(i,2)*3;
34     angle=temp(i,3)*180/pi;
35     aperture=temp(i,4);
36     conductivity=temp(i,5);
37     length=temp(i,6)*3+0.01;
38     model.geom('geom1').feature.create(name, 'Block');
```

```

39     model.geom('geom1').feature(name).set('base', 'center');
40     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', num2str(posx),0);
41     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', '15', 1);
42     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', num2str(posy),2);
43     model.geom('geom1').feature(name).set('rot', num2str(angle));
44     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size',num2str(length), 0);
45     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size', '30+0.01',1);
46     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size',num2str(aperture), 2);
47     end
48
49 model.geom('geom1').feature.create('unil', 'Union');
50 model.geom('geom1').feature('unil').selection('input').set(fracset);
51 model.geom('geom1').feature('unil').set('intbnd', 'off');
52
53 % now trim the edges around a unit square and keep only the result
54 % (this is the fractures)
55 model.geom('geom1').feature.create('blk1', 'Block');
56 model.geom('geom1').feature('blk1').setIndex('size', '30', 0);
57 model.geom('geom1').feature('blk1').setIndex('size', '30', 1);
58 model.geom('geom1').feature('blk1').setIndex('size', '30', 2);
59 model.geom('geom1').feature.create('fracs', 'Intersection');
60 model.geom('geom1').feature('fracs').selection('input').set({'blk1' 'unil'});
61 model.geom('geom1').feature('fracs').set('intbnd', 'off');
62
63 % remake unit square and subtract the fractures (this is the matrix)
64 model.geom('geom1').feature.create('blk2', 'Block');
65 model.geom('geom1').feature('blk2').setIndex('size', '30', 0);
66 model.geom('geom1').feature('blk2').setIndex('size', '30', 1);
67 model.geom('geom1').feature('blk2').setIndex('size', '30', 2);
68 model.geom('geom1').feature.create('matrix', 'Difference');
69 model.geom('geom1').feature('matrix').selection('input').set({'blk2'});
70 model.geom('geom1').feature('matrix').selection('input2').set({'fracs'});
71 model.geom('geom1').feature('matrix').set('keep', 'on');
72 model.geom('geom1').feature('matrix').set('intbnd', 'on');
73
74 % allow the fractures and matrix to be grouped as collections of domains
75 % that can be next used to easily define material properties by allowing
76 % for them to be "selected" (very important)
77 model.geom('geom1').feature('fracs').set('createselection', 'on');
78 model.geom('geom1').feature('matrix').set('createselection', 'on');
79
80 % set surfaces as upper and lower boundary conditions and make them selectable
81 model.geom('geom1').feature.create('ps1', 'ParametricSurface');
82 model.geom('geom1').feature('ps1').set('parmax1', '30');
83 model.geom('geom1').feature('ps1').set('parmax2', '30');
84 model.geom('geom1').feature('ps1').setIndex('coord', '0', 0);

```

```

85 model.geom('geom1').feature('ps1').setIndex('coord', 's1', 1);
86 model.geom('geom1').feature('ps1').setIndex('coord', 's2', 2);
87 model.geom('geom1').feature('ps1').set('createselection', 'on');
88
89 model.geom('geom1').feature.create('ps2', 'ParametricSurface');
90 model.geom('geom1').feature('ps2').set('parmax1', '30');
91 model.geom('geom1').feature('ps2').set('parmax2', '30');
92 model.geom('geom1').feature('ps2').setIndex('coord', 's1', 0);
93 model.geom('geom1').feature('ps2').setIndex('coord', '0', 1);
94 model.geom('geom1').feature('ps2').setIndex('coord', 's2', 2);
95 model.geom('geom1').feature('ps2').set('createselection', 'on');
96
97 model.geom('geom1').feature.create('ps3', 'ParametricSurface');
98 model.geom('geom1').feature('ps3').set('parmax1', '30');
99 model.geom('geom1').feature('ps3').set('parmax2', '30');
100 model.geom('geom1').feature('ps3').setIndex('coord', '30', 0);
101 model.geom('geom1').feature('ps3').setIndex('coord', 's1', 1);
102 model.geom('geom1').feature('ps3').setIndex('coord', 's2', 2);
103 model.geom('geom1').feature('ps3').set('createselection', 'on');
104
105 model.geom('geom1').feature.create('ps4', 'ParametricSurface');
106 model.geom('geom1').feature('ps4').set('parmax1', '30');
107 model.geom('geom1').feature('ps4').set('parmax2', '30');
108 model.geom('geom1').feature('ps4').setIndex('coord', 's1', 0);
109 model.geom('geom1').feature('ps4').setIndex('coord', '30', 1);
110 model.geom('geom1').feature('ps4').setIndex('coord', 's2', 2);
111 model.geom('geom1').feature('ps4').set('createselection', 'on');
112
113 model.geom('geom1').feature.create('ps5', 'ParametricSurface');
114 model.geom('geom1').feature('ps5').set('parmax1', '30');
115 model.geom('geom1').feature('ps5').set('parmax2', '30');
116 model.geom('geom1').feature('ps5').setIndex('coord', 's1', 0);
117 model.geom('geom1').feature('ps5').setIndex('coord', 's2', 1);
118 model.geom('geom1').feature('ps5').setIndex('coord', '30', 2);
119 model.geom('geom1').feature('ps5').set('createselection', 'on');
120
121 model.geom('geom1').feature.create('ps6', 'ParametricSurface');
122 model.geom('geom1').feature('ps6').set('parmax1', '30');
123 model.geom('geom1').feature('ps6').set('parmax2', '30');
124 model.geom('geom1').feature('ps6').setIndex('coord', 's1', 0);
125 model.geom('geom1').feature('ps6').setIndex('coord', 's2', 1);
126 model.geom('geom1').feature('ps6').setIndex('coord', '0', 2);
127 model.geom('geom1').feature('ps6').set('createselection', 'on');
128
129 % create the mesh
130 model.mesh('mesh1').feature.create('ftet1', 'FreeTet');

```

```

131 model.mesh('mesh1').feature('ftet1').selection.geom('geom1', 3);
132 model.mesh('mesh1').feature('ftet1').selection.named('geom1_matrix_dom');
133 model.mesh('mesh1').feature('size').set('hauto', '2');
134 model.mesh('mesh1').feature.create('ftet2', 'FreeTet');
135 model.mesh('mesh1').feature('ftet2').feature.create('size1', 'Size');
136 model.mesh('mesh1').feature('ftet2').selection.geom('geom1', 3);
137 model.mesh('mesh1').feature('ftet2').selection.named('geom1_fracs_dom');
138 model.mesh('mesh1').feature('ftet2').feature('size1').set('hauto', '1');
139
140 % create points to set the sources according the source position for each
141 % experiment
142 s = [0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9.5];
143 source = load ('H:\Trabajos\Ingenieria Industrial\Internship\Workspace ...
    COMSOL\Parallel_fracts\SourceCoordX.txt');
144 for j = 1:size(s,2)
145     model.geom('geom1').feature.create('M', 'Point');
146     model.geom('geom1').feature('M').setIndex('p', num2str(source(2*j-1)+s(j)), 0);
147     model.geom('geom1').feature('M').setIndex('p', '15', 1);
148     model.geom('geom1').feature('M').setIndex('p', '30', 2);
149     model.geom('geom1').feature('M').set('createselection', 'on');
150     model.geom('geom1').feature.create('N', 'Point');
151     model.geom('geom1').feature('N').setIndex('p', num2str(source(2*j-1)+2*s(j)), 0);
152     model.geom('geom1').feature('N').setIndex('p', '15', 1);
153     model.geom('geom1').feature('N').setIndex('p', '30', 2);
154     model.geom('geom1').feature('N').set('createselection', 'on');
155
156     for k = 1:(size(source,2)/size(s,2))
157         model.geom('geom1').feature.create('A', 'Point');
158         model.geom('geom1').feature('A').setIndex('p', source(2*j+k-2), 0);
159         model.geom('geom1').feature('A').setIndex('p', '15', 1);
160         model.geom('geom1').feature('A').setIndex('p', '30', 2);
161         model.geom('geom1').feature('A').set('createselection', 'on');
162
163         % set boundary conditions
164         model.variable.create('var1');
165         model.variable('var1').model('mod1');
166         model.variable('var1').set('radius', ['sqrt((x-' num2str(source(2*j+k-2)) ...
            ')^2+(y-0.5)^2+(z-1)^2)']);
167         model.variable('var1').descr('radius', 'Radial distance from source');
168         model.variable('var1').set('alpha', '1/(radius^2)');
169         model.variable('var1').name('Mixed BC's');
170         model.variable.create('var2');
171         model.variable('var2').model('mod1');
172         model.variable('var2').set('sigma', '1e-4');
173         model.variable('var2').descr('sigma', 'Matrix conductivity');
174         model.variable('var2').name('Matrix Conductivity');

```



```

175     model.variable('var2').selection.geom('geom1', 3);
176     model.variable('var2').selection.named('geom1_matrix_dom');
177     model.variable.create('var3');
178     model.variable('var3').model('mod1');
179     model.variable('var3').set('sigma', '1e-2');
180     model.variable('var3').name('Fracture Conductivity');
181     model.variable('var3').selection.geom('geom1', 3);
182     model.variable('var3').selection.named('geom1_fracs_dom');
183
184     model.physics('ec').feature.create('ncd1', 'NormalCurrentDensity', 2);
185     model.physics('ec').feature('ncd1').set('nJ', 1, ['-sigma*alpha*' ...
        num2str(source(2*j+k-2)) '*V']);
186     model.physics('ec').feature('ncd1').selection.named('geom1_ps1_bnd');
187     model.physics('ec').feature.create('ncd2', 'NormalCurrentDensity', 2);
188     model.physics('ec').feature('ncd2').set('nJ', 1, '-sigma*alpha*15*V');
189     model.physics('ec').feature('ncd2').selection.named('geom1_ps2_bnd');
190     model.physics('ec').feature.create('ncd3', 'NormalCurrentDensity', 2);
191     model.physics('ec').feature('ncd3').set('nJ', 1, ['-sigma*alpha*' ...
        num2str(1-source(2*j+k-2)) '*V']);
192     model.physics('ec').feature('ncd3').selection.named('geom1_ps3_bnd');
193     model.physics('ec').feature.create('ncd4', 'NormalCurrentDensity', 2);
194     model.physics('ec').feature('ncd4').set('nJ', 1, '-sigma*alpha*15*V');
195     model.physics('ec').feature('ncd4').selection.named('geom1_ps4_bnd');
196     model.physics('ec').feature.create('ncd5', 'NormalCurrentDensity', 2);
197     model.physics('ec').feature('ncd5').set('nJ', 1, '-sigma*alpha*30*V');
198     model.physics('ec').feature('ncd5').selection.named('geom1_ps6_bnd');
199
200     %Dirichlet BC's
201     %     model.physics('ec').feature('ncd1').active(false);
202     %     model.physics('ec').feature('ncd2').active(false);
203     %     model.physics('ec').feature('ncd3').active(false);
204     %     model.physics('ec').feature('ncd4').active(false);
205     %     model.physics('ec').feature('ncd5').active(false);
206     %     model.physics('ec').feature.create('pot1', 'ElectricPotential', 2);
207     %     model.physics('ec').feature('pot1').set('V0', 1, '0');
208     %     model.physics('ec').feature('pot1').selection.named('geom1_ps1_bnd');
209     %     model.physics('ec').feature.create('pot2', 'ElectricPotential', 2);
210     %     model.physics('ec').feature('pot2').set('V0', 1, '0');
211     %     model.physics('ec').feature('pot2').selection.named('geom1_ps2_bnd');
212     %     model.physics('ec').feature.create('pot3', 'ElectricPotential', 2);
213     %     model.physics('ec').feature('pot3').set('V0', 1, '0');
214     %     model.physics('ec').feature('pot3').selection.named('geom1_ps3_bnd');
215     %     model.physics('ec').feature.create('pot4', 'ElectricPotential', 2);
216     %     model.physics('ec').feature('pot4').set('V0', 1, '0');
217     %     model.physics('ec').feature('pot4').selection.named('geom1_ps4_bnd');
218     %     model.physics('ec').feature.create('pot5', 'ElectricPotential', 2);

```

```

219 %         model.physics('ec').feature('pot5').set('V0', 1, '0');
220 %         model.physics('ec').feature('pot5').selection.named('geom1_ps6_bnd');
221
222
223 model.physics('ec').feature.create('pcs1', 'PointCurrentSource', 0);
224 model.physics('ec').feature('pcs1').selection.named('geom1_A.pnt');
225 if k == 1
226     model.physics('ec').feature('pcs1').set('Qjp', 1, '10');
227 elseif k == 2
228     model.physics('ec').feature('pcs1').set('Qjp', 1, '-10');
229 end
230
231 model.physics('ec').feature('cucn1').set('sigma.mat', 1, 'userdef');
232 model.physics('ec').feature('cucn1').set('sigma', {'sigma' '0' '0' '0' 'sigma' '0' ...
        '0' '0' 'sigma'});
233
234 % run geometry and the meshing
235 model.geom('geom1').runAll;
236 model.mesh('mesh1').run;
237
238 % set solution properties
239 model.sol.create('sol1');
240 model.sol('sol1').study('std1');
241 model.sol('sol1').feature.create('st1', 'StudyStep');
242 model.sol('sol1').feature('st1').set('study', 'std1');
243 model.sol('sol1').feature('st1').set('studystep', 'stat');
244 model.sol('sol1').feature.create('v1', 'Variables');
245 model.sol('sol1').feature('v1').set('control', 'stat');
246 model.sol('sol1').feature.create('s1', 'Stationary');
247 model.sol('sol1').feature('s1').feature.create('fcl', 'FullyCoupled');
248 model.sol('sol1').feature('s1').feature.create('il', 'Iterative');
249 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('prefuntype', 'left');
250 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('maxlinit', 10000);
251 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('linsolver', 'cg');
252 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('rhob', 400);
253 model.sol('sol1').feature('s1').feature('fcl').set('linsolver', 'il');
254 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature.create('mg1', 'Multigrid');
255 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('prefun', 'amg');
256 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('iter', 2);
257 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mgcycle', 'v');
258 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mcasegen', 'any');
259 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('gmglevels', 1);
260 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('scale', 2);
261 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('massem', true);
262 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mkeep', false);
263 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('rmethod', 'longest');

```

```

264 model.sol('sol1').feature('s1').feature('i1').feature('mg1').set('mglevels', 5);
265 model.sol('sol1').feature('s1').feature('i1').feature('mg1').set('maxcoarsedof', 5000);
266 model.sol('sol1').feature('s1').feature('i1').feature('mg1').set('amgauto', 3);
267 model.sol('sol1').feature('s1').feature.remove('fcDef');
268 model.sol('sol1').attach('std1');
269 model.sol('sol1').runAll;
270
271 % create point evaluation to get the potencial difference between M and
272 % N electrodes
273 model.result.numerical.create('pev1', 'EvalPoint');
274 model.result.numerical('pev1').selection.named('geom1_M.pnt');
275 model.result.table.create('tbl1', 'Table');
276 model.result.table('tbl1').comments('Delta-V (V_m)');
277 model.result.numerical('pev1').set('table', 'tbl1');
278 model.result.numerical('pev1').setResult;
279 model.result.numerical.create('pev2', 'EvalPoint');
280 model.result.numerical('pev2').selection.named('geom1_N.pnt');
281 model.result.numerical('pev2').set('table', 'tbl1');
282 model.result.numerical('pev2').appendResult;
283
284
285 % export the results
286 model.result.export.create('tbl1', 'tbl1', 'Table');
287 model.result.export('tbl1').set('filename', ['H:\Trabajos\Ingenier' ...
        native2unicode(hex2dec('00ed'), 'Cp1252') 'a Industrial\Internship\Workspace ...
        COMSOL\Parallel-fracts\Delta-V-3D\Delta.s' num2str(s(j)) '_' num2str(k) '.txt']);
288 model.result.export('tbl1').run;
289
290 % remove the existing model
291 model.geom('geom1').feature.remove('A');
292 model.variable.remove('var1');
293 model.variable.remove('var2');
294 model.variable.remove('var3');
295 model.physics('ec').feature.remove('ncd1');
296 model.physics('ec').feature.remove('ncd2');
297 model.physics('ec').feature.remove('ncd3');
298 model.physics('ec').feature.remove('ncd4');
299 model.physics('ec').feature.remove('ncd5');
300 % model.physics('ec').feature.remove('pot1');
301 % model.physics('ec').feature.remove('pot2');
302 % model.physics('ec').feature.remove('pot3');
303 % model.physics('ec').feature.remove('pot4');
304 % model.physics('ec').feature.remove('pot5');
305 model.physics('ec').feature.remove('pcs1');
306
307 model.result.numerical.remove('pev1');

```

```
308     model.result.numerical.remove('pev2');
309     model.result.table.remove('tbl1');
310     model.result.table.remove('tbl2');
311     model.sol.remove('sol1');
312 end
313 model.geom('geom1').feature.remove('M');
314 model.geom('geom1').feature.remove('N');
315 end
316
317 out = model;
```

Listing 9: *Sugar_Box.m*

```

1
2 %Victor Caballero:
3 %creado: agosto de 2014, última modificación enero 2015
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5
6 function out = model
7
8 import com.comsol.model.*
9 import com.comsol.model.util.*
10
11 % initial set of up model
12 model = ModelUtil.create('Sugar-box-3D');
13 model.modelPath('I:\Trabajos\Ingenieria Industrial\Internship\Workspace COMSOL\Sugar-box');
14 model.modelNode.create('mod1');
15 model.geom.create('geom1', 3);
16 model.mesh.create('mesh1', 'geom1');
17 model.physics.create('ec', 'ConductiveMedia', 'geom1');
18 model.study.create('std1');
19 model.study('std1').feature.create('stat', 'Stationary');
20 model.study('std1').feature('stat').activate('ec', true);
21
22
23 % set the repair tolerance to be a bit lower than the default value to
24 % account for limited significant figures in the text files that Delphine
25 % sent me
26 model.geom('geom1').feature('fin').set('repairtol', '1.0E-10');
27
28 % define the geometry, material properties, and boundary conditions
29 % create fractures from data in Delphine's text file, make union
30 temp = textread('Sugar-box-5.txt');
31 nfrac=size(temp,1);
32 % create the horizontal set of fractures
33 for i=1:nfrac*0.5;
34     name=['fr',num2str(i)];
35     fracset{i}=name;
36     posx=temp(i,1)/10;
37     posy=temp(i,2)/10;
38     ang=round(temp(i,3)*180/pi);
39     ap=temp(i,4);
40     conductivity=temp(i,5);
41     len=temp(i,6)/10; % add a bit to ensure crossing at boundaries
42     model.geom('geom1').feature.create(name, 'Block');
43     model.geom('geom1').feature(name).set('base', 'center');
44     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', num2str(posx), 0);
45     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', '0.5', 1);

```

```

46     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', num2str(posy), 2);
47     model.geom('geom1').feature(name).set('rot', num2str(ang));
48     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size', num2str(len), 0);
49     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size', '1', 1);
50     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size', num2str(ap), 2);
51 end
52
53 % make union between horizontal fracs
54 model.geom('geom1').feature.create('uni1', 'Union');
55 model.geom('geom1').feature('uni1').selection('input').set(fracset);
56 model.geom('geom1').feature('uni1').set('keep', 'off');
57 model.geom('geom1').feature('uni1').set('intbnd', 'on');
58
59 % now trim the edges around a unit cube and keep only the result
60 % (this is the horizontal fractures)
61 model.geom('geom1').feature.create('blk1', 'Block');
62 model.geom('geom1').feature('blk1').setIndex('size', '1', 0);
63 model.geom('geom1').feature('blk1').setIndex('size', '1', 1);
64 model.geom('geom1').feature('blk1').setIndex('size', '1', 2);
65 model.geom('geom1').feature.create('hor_fracs', 'Intersection');
66 model.geom('geom1').feature('hor_fracs').selection('input').set({'blk1' 'uni1'});
67 model.geom('geom1').feature('hor_fracs').set('intbnd', 'on');
68
69 % create the vertical set of fractures
70 for i=nfrac*0.5+1:nfrac;
71     name=['fr',num2str(i)];
72     fracset{i}=name;
73     posx=temp(i,1)/10;
74     posy=temp(i,2)/10;
75     ang=round(temp(i,3)*180/pi);
76     ap=temp(i,4);
77     conductivity=temp(i,6);
78     len=temp(i,6)/10; % add a bit to ensure crossing at boundaries
79     model.geom('geom1').feature.create(name, 'Block');
80     model.geom('geom1').feature(name).set('base', 'center');
81     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', num2str(posx), 0);
82     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', '0.5', 1);
83     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', num2str(posy), 2);
84     model.geom('geom1').feature(name).set('rot', num2str(ang));
85     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size', num2str(len), 0);
86     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size', num2str(ap), 1);
87     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size', '1', 2);
88 end
89
90 % make union between vertical fracs
91 model.geom('geom1').feature.create('uni2', 'Union');

```

```

92 model.geom('geom1').feature('uni2').selection('input').set(fracset);
93 model.geom('geom1').feature('uni2').set('keep', 'off');
94 model.geom('geom1').feature('uni2').set('intbnd', 'on');
95
96 % now trim the edges around a unit cube and keep only the result
97 % (this is the vertical fractures)
98 % remake unit square
99 model.geom('geom1').feature.create('blk2', 'Block');
100 model.geom('geom1').feature('blk2').setIndex('size', '1', 0);
101 model.geom('geom1').feature('blk2').setIndex('size', '1', 1);
102 model.geom('geom1').feature('blk2').setIndex('size', '1', 2);
103 model.geom('geom1').feature.create('ver.fracs', 'Intersection');
104 model.geom('geom1').feature('ver.fracs').selection('input').set({'blk2' 'uni2'});
105 model.geom('geom1').feature('ver.fracs').set('intbnd', 'on');
106
107 % make union between vertical and horizontal fractures
108 model.geom('geom1').feature.create('uni3', 'Union');
109 model.geom('geom1').feature('uni3').selection('input').set({'hor.fracs' 'ver.fracs'});
110 model.geom('geom1').feature('uni3').set('keep', 'off');
111 model.geom('geom1').feature('uni3').set('intbnd', 'on');
112
113 % now trim the edges around a unit cube and keep only the result
114 % (this is the all the fracture network)
115 % remake unit square
116 model.geom('geom1').feature.create('blk4', 'Block');
117 model.geom('geom1').feature('blk4').setIndex('size', '1', 0);
118 model.geom('geom1').feature('blk4').setIndex('size', '1', 1);
119 model.geom('geom1').feature('blk4').setIndex('size', '1', 2);
120 model.geom('geom1').feature.create('fracs', 'Intersection');
121 model.geom('geom1').feature('fracs').selection('input').set({'blk4' 'uni3'});
122 model.geom('geom1').feature('fracs').set('intbnd', 'on');
123
124 % remake unit square
125 model.geom('geom1').feature.create('blk5', 'Block');
126 model.geom('geom1').feature('blk5').setIndex('size', '1', 0);
127 model.geom('geom1').feature('blk5').setIndex('size', '1', 1);
128 model.geom('geom1').feature('blk5').setIndex('size', '1', 2);
129
130 % subtract all fractures (this is the matrix)
131 model.geom('geom1').feature.create('matrix', 'Difference');
132 model.geom('geom1').feature('matrix').selection('input').set({'blk5'});
133 model.geom('geom1').feature('matrix').selection('input2').set({'fracs'});
134 model.geom('geom1').feature('matrix').set('keep', 'on');
135 model.geom('geom1').feature('matrix').set('intbnd', 'off');
136
137 % allow the fractures and matrix to be grouped as collections of domains

```

```

138 % that can be next used to easily define material properties by allowing
139 % for them to be "selected" (very important)
140 model.geom('geom1').feature('fracs').set('createselection', 'on');
141 model.geom('geom1').feature('matrix').set('createselection', 'on');
142
143 % set surfaces as upper and lower boundary conditions and make them selectable
144 model.geom('geom1').feature.create('ps1', 'ParametricSurface');
145 model.geom('geom1').feature('ps1').set('parmax1', '1');
146 model.geom('geom1').feature('ps1').set('parmax2', '1');
147 model.geom('geom1').feature('ps1').setIndex('coord', '0', 0);
148 model.geom('geom1').feature('ps1').setIndex('coord', 's1', 1);
149 model.geom('geom1').feature('ps1').setIndex('coord', 's2', 2);
150 model.geom('geom1').feature('ps1').set('createselection', 'on');
151
152 model.geom('geom1').feature.create('ps2', 'ParametricSurface');
153 model.geom('geom1').feature('ps2').set('parmax1', '1');
154 model.geom('geom1').feature('ps2').set('parmax2', '1');
155 model.geom('geom1').feature('ps2').setIndex('coord', 's1', 0);
156 model.geom('geom1').feature('ps2').setIndex('coord', '0', 1);
157 model.geom('geom1').feature('ps2').setIndex('coord', 's2', 2);
158 model.geom('geom1').feature('ps2').set('createselection', 'on');
159
160 model.geom('geom1').feature.create('ps3', 'ParametricSurface');
161 model.geom('geom1').feature('ps3').set('parmax1', '1');
162 model.geom('geom1').feature('ps3').set('parmax2', '1');
163 model.geom('geom1').feature('ps3').setIndex('coord', '1', 0);
164 model.geom('geom1').feature('ps3').setIndex('coord', 's1', 1);
165 model.geom('geom1').feature('ps3').setIndex('coord', 's2', 2);
166 model.geom('geom1').feature('ps3').set('createselection', 'on');
167
168 model.geom('geom1').feature.create('ps4', 'ParametricSurface');
169 model.geom('geom1').feature('ps4').set('parmax1', '1');
170 model.geom('geom1').feature('ps4').set('parmax2', '1');
171 model.geom('geom1').feature('ps4').setIndex('coord', 's1', 0);
172 model.geom('geom1').feature('ps4').setIndex('coord', '1', 1);
173 model.geom('geom1').feature('ps4').setIndex('coord', 's2', 2);
174 model.geom('geom1').feature('ps4').set('createselection', 'on');
175
176 model.geom('geom1').feature.create('ps5', 'ParametricSurface');
177 model.geom('geom1').feature('ps5').set('parmax1', '1');
178 model.geom('geom1').feature('ps5').set('parmax2', '1');
179 model.geom('geom1').feature('ps5').setIndex('coord', 's1', 0);
180 model.geom('geom1').feature('ps5').setIndex('coord', 's2', 1);
181 model.geom('geom1').feature('ps5').setIndex('coord', '1', 2);
182 model.geom('geom1').feature('ps5').set('createselection', 'on');
183

```



```

184 model.geom('geom1').feature.create('ps6', 'ParametricSurface');
185 model.geom('geom1').feature('ps6').set('parmax1', '1');
186 model.geom('geom1').feature('ps6').set('parmax2', '1');
187 model.geom('geom1').feature('ps6').setIndex('coord', 's1', 0);
188 model.geom('geom1').feature('ps6').setIndex('coord', 's2', 1);
189 model.geom('geom1').feature('ps6').setIndex('coord', '0', 2);
190 model.geom('geom1').feature('ps6').set('createselection', 'on');
191
192 % create points to set the sources according the source position for each
193 % experiment
194 s = [0.9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9.5]/30;
195 source = load ('G:\Trabajos\Ingenieria Industrial\Internship\Workspace ...
        COMSOL\Sugar_box\SourceCoordX.txt');
196 % s = 1/30;
197 % source = [0.45 0.55];
198 for j = 1:size(s,2)
199     model.geom('geom1').feature.create('M', 'Point');
200     model.geom('geom1').feature('M').setIndex('p', num2str(source(2*j-1)+s(j)), 0);
201     model.geom('geom1').feature('M').setIndex('p', '0.5', 1);
202     model.geom('geom1').feature('M').setIndex('p', '1', 2);
203     model.geom('geom1').feature('M').set('createselection', 'on');
204     model.geom('geom1').feature.create('N', 'Point');
205     model.geom('geom1').feature('N').setIndex('p', num2str(source(2*j-1)+2*s(j)), 0);
206     model.geom('geom1').feature('N').setIndex('p', '0.5', 1);
207     model.geom('geom1').feature('N').setIndex('p', '1', 2);
208     model.geom('geom1').feature('N').set('createselection', 'on');
209
210     for k = 1:(size(source,2)/size(s,2))
211         model.geom('geom1').feature.create('A', 'Point');
212         model.geom('geom1').feature('A').setIndex('p', source(2*j+k-2), 0);
213         model.geom('geom1').feature('A').setIndex('p', '0.5', 1);
214         model.geom('geom1').feature('A').setIndex('p', '1', 2);
215         model.geom('geom1').feature('A').set('createselection', 'on');
216
217         % set boundary conditions
218         model.variable.create('var1');
219         model.variable('var1').model('mod1');
220         model.variable('var1').set('radius', ['sqrt((x-' num2str(source(2*j+k-2)) ...
                ')^2+(y-0.5)^2+(z-1)^2)']);
221         model.variable('var1').descr('radius', 'Radial distance from source');
222         model.variable('var1').set('alpha', '1/(radius^2)');
223         model.variable('var1').name('Mixed BC's');
224         model.variable.create('var2');
225         model.variable('var2').model('mod1');
226         model.variable('var2').set('sigma', '1e-8');
227         model.variable('var2').descr('sigma', 'Matrix conductivity');

```

```

228 model.variable('var2').name('Matrix Conductivity');
229 model.variable('var2').selection.geom('geom1', 3);
230 model.variable('var2').selection.named('geom1_matrix_dom');
231 model.variable.create('var3');
232 model.variable('var3').model('mod1');
233 model.variable('var3').set('sigma', '1e-2');
234 model.variable('var3').name('Fracture Conductivity');
235 model.variable('var3').selection.geom('geom1', 3);
236 model.variable('var3').selection.named('geom1_fracs_dom');
237
238 model.physics('ec').feature.create('ncd1', 'NormalCurrentDensity', 2);
239 model.physics('ec').feature('ncd1').set('nJ', 1, ['-sigma*alpha*' ...
    num2str(source(2*j+k-2)) '*V']);
240 model.physics('ec').feature('ncd1').selection.named('geom1_ps1_bnd');
241 model.physics('ec').feature.create('ncd2', 'NormalCurrentDensity', 2);
242 model.physics('ec').feature('ncd2').set('nJ', 1, '-sigma*alpha*0.5*V');
243 model.physics('ec').feature('ncd2').selection.named('geom1_ps2_bnd');
244 model.physics('ec').feature.create('ncd3', 'NormalCurrentDensity', 2);
245 model.physics('ec').feature('ncd3').set('nJ', 1, ['-sigma*alpha*' ...
    num2str(1-source(2*j+k-2)) '*V']);
246 model.physics('ec').feature('ncd3').selection.named('geom1_ps3_bnd');
247 model.physics('ec').feature.create('ncd4', 'NormalCurrentDensity', 2);
248 model.physics('ec').feature('ncd4').set('nJ', 1, '-sigma*alpha*0.5*V');
249 model.physics('ec').feature('ncd4').selection.named('geom1_ps4_bnd');
250 model.physics('ec').feature.create('ncd5', 'NormalCurrentDensity', 2);
251 model.physics('ec').feature('ncd5').set('nJ', 1, '-sigma*alpha*1*V');
252 model.physics('ec').feature('ncd5').selection.named('geom1_ps6_bnd');
253
254 model.physics('ec').feature.create('pcs1', 'PointCurrentSource', 0);
255 model.physics('ec').feature('pcs1').selection.named('geom1_A_pnt');
256 if k == 1
257     model.physics('ec').feature('pcs1').set('Qjp', 1, '10');
258 elseif k == 2
259     model.physics('ec').feature('pcs1').set('Qjp', 1, '-10');
260 end
261
262 model.physics('ec').feature('cucn1').set('sigma_mat', 1, 'userdef');
263 model.physics('ec').feature('cucn1').set('sigma', {'sigma' '0' '0' '0' 'sigma' '0' ...
    '0' '0' 'sigma'});
264
265 % run geometry and create mesh
266 model.geom('geom1').runAll;
267 model.mesh('mesh1').autoMeshSize(5);
268 model.mesh('mesh1').run;
269
270 % set solution properties

```

```

271     model.sol.create('sol1');
272     model.sol('sol1').study('std1');
273     model.sol('sol1').feature.create('st1', 'StudyStep');
274     model.sol('sol1').feature('st1').set('study', 'std1');
275     model.sol('sol1').feature('st1').set('studystep', 'stat');
276     model.sol('sol1').feature.create('v1', 'Variables');
277     model.sol('sol1').feature('v1').set('control', 'stat');
278     model.sol('sol1').feature.create('s1', 'Stationary');
279     model.sol('sol1').feature('s1').feature.create('fcl', 'FullyCoupled');
280     model.sol('sol1').feature('s1').feature.create('il', 'Iterative');
281     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('prefuntype', 'left');
282     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('maxlinit', 10000);
283     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('linsolver', 'cg');
284     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('rhob', 400);
285     model.sol('sol1').feature('s1').feature('fcl').set('linsolver', 'il');
286     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature.create('mg1', 'Multigrid');
287     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('prefun', 'amg');
288     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('iter', 2);
289     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mgcycle', 'v');
290     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mcasegen', 'any');
291     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('gmglevels', 1);
292     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('scale', 2);
293     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('massem', true);
294     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mkeep', false);
295     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('rmethode', 'longest');
296     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mglevels', 5);
297     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('maxcoarsedof', 5000);
298     model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('amgauto', 3);
299     model.sol('sol1').feature('s1').feature.remove('fcDef');
300     model.sol('sol1').attach('std1');
301     model.sol('sol1').runAll;
302
303     % create point evaluation to get the potential difference between M and
304     % N electrodes
305     model.result.numerical.create('pev1', 'EvalPoint');
306     model.result.numerical('pev1').selection.named('geom1_M.pnt');
307     model.result.table.create('tbl1', 'Table');
308     model.result.table('tbl1').comments('Delta_V (V_m)');
309     model.result.numerical('pev1').set('table', 'tbl1');
310     model.result.numerical('pev1').setResult;
311     model.result.numerical.create('pev2', 'EvalPoint');
312     model.result.numerical('pev2').selection.named('geom1_N.pnt');
313     model.result.numerical('pev2').set('table', 'tbl1');
314     model.result.numerical('pev2').appendResult;
315
316

```

```

317     % export the results
318     model.result.export.create('tbl1', 'tbl1', 'Table');
319     model.result.export('tbl1').set('filename', ['G:\Trabajos\Ingenier' ...
        native2unicode(hex2dec('00ed'), 'Cp1252') 'a Industrial\Internship\Workspace ...
        COMSOL\Sugar_box\Delta-V-3D\Delta.s' num2str(s(j)) '_' num2str(k) '.txt']);
320     model.result.export('tbl1').run;
321
322     % remove the existing model
323     model.geom('geom1').feature.remove('A');
324     model.variable.remove('var1');
325     model.variable.remove('var2');
326     model.variable.remove('var3');
327     model.physics('ec').feature.remove('ncd1');
328     model.physics('ec').feature.remove('ncd2');
329     model.physics('ec').feature.remove('ncd3');
330     model.physics('ec').feature.remove('ncd4');
331     model.physics('ec').feature.remove('ncd5');
332     model.physics('ec').feature.remove('pcs1');
333
334     model.result.numerical.remove('pev1');
335     model.result.numerical.remove('pev2');
336     model.result.table.remove('tbl1');
337     model.result.table.remove('tbl2');
338     model.sol.remove('sol1');
339     end
340     model.geom('geom1').feature.remove('M');
341     model.geom('geom1').feature.remove('N');
342 end
343
344 out = model;

```

Listing 10: *Random_fracts.m*

```

1
2 %Víctor Caballero:
3 %creado: agosto de 2014, última modificación enero 2015
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5
6 function out = model
7
8 import com.comsol.model.*
9 import com.comsol.model.util.*
10
11 % initial set of up model
12 model = ModelUtil.create('Random_fracts_3D_app_res');
13 model.modelPath('I:\Trabajos\Ingenieria Industrial\Internship\Workspace COMSOL\Sugar_box');
14 model.modelNode.create('mod1');
15 model.geom.create('geom1', 3);
16 model.mesh.create('mesh1', 'geom1');
17 model.physics.create('ec', 'ConductiveMedia', 'geom1');
18 model.study.create('std1');
19 model.study('std1').feature.create('stat', 'Stationary');
20 model.study('std1').feature('stat').activate('ec', true);
21
22 % set the repair tolerance to be a bit lower than the default value to
23 % account for limited significant figures in the text files that Delphine
24 % sent me
25 model.geom('geom1').feature('fin').set('repairtol', '1.0E-8');
26
27 % define the geometry, material properties, and boundary conditions
28 % create fractures from data in Delphine's text file, make union
29 temp = textread('random_test.txt');
30 nfrac=size(temp,1);
31 for i=1:nfrac;
32     name=['fr',num2str(i)];
33     rotate=['rot',num2str(i)];
34     fracset{i}=rotate;
35     posx=temp(i,1)/10;
36     posy=temp(i,2)/10;
37     angle=round(temp(i,3)*180/pi);
38     aperture=temp(i,4);
39     %     length=temp(i,5)+0.01;
40     length=temp(i,5)/10+0.01;
41     model.geom('geom1').feature.create(name, 'Block');
42     model.geom('geom1').feature(name).set('base', 'center');
43     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', num2str(posx), 0);
44     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', '0.5', 1);
45     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('pos', num2str(posy), 2);

```

```

46     model.geom('geom1').feature(name).set('rot', '0');
47     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size', num2str(length), 0);
48     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size', '2', 1); % very large
49     % in order to guarantee fractures cross the borders
50     model.geom('geom1').feature(name).setIndex('size', num2str(aperture), 2);
51     % rotate the fracture
52     model.geom('geom1').feature.create(rotate, 'Rotate');
53     model.geom('geom1').feature(rotate).selection('input').set(name);
54     model.geom('geom1').feature(rotate).set('rot', num2str(-angle));
55     model.geom('geom1').feature(rotate).setIndex('pos', num2str(posx), 0);
56     model.geom('geom1').feature(rotate).setIndex('pos', '0', 2);
57     model.geom('geom1').feature(rotate).setIndex('pos', num2str(posy), 2);
58     model.geom('geom1').feature(rotate).setIndex('ax3', '0', 0);
59     model.geom('geom1').feature(rotate).setIndex('ax3', '1', 1);
60     model.geom('geom1').feature(rotate).setIndex('ax3', '0', 2);
61 end
62
63 model.geom('geom1').feature.create('unil', 'Union');
64 model.geom('geom1').feature('unil').selection('input').set(fracset);
65 model.geom('geom1').feature('unil').set('intbnd', 'off');
66
67 % now trim the edges around a unit square and keep only the result
68 % (this is the fractures)
69 model.geom('geom1').feature.create('blk1', 'Block');
70 model.geom('geom1').feature('blk1').setIndex('size', '1', 0);
71 model.geom('geom1').feature('blk1').setIndex('size', '1', 1);
72 model.geom('geom1').feature('blk1').setIndex('size', '1', 2);
73 model.geom('geom1').feature.create('fracs', 'Intersection');
74 model.geom('geom1').feature('fracs').selection('input').set({'blk1' 'unil'});
75 model.geom('geom1').feature('fracs').set('intbnd', 'off');
76
77 % remake unit square and subtract the fractures (this is the matrix)
78 model.geom('geom1').feature.create('blk2', 'Block');
79 model.geom('geom1').feature('blk2').setIndex('size', '1', 0);
80 model.geom('geom1').feature('blk2').setIndex('size', '1', 1);
81 model.geom('geom1').feature('blk2').setIndex('size', '1', 2);
82 model.geom('geom1').feature.create('matrix', 'Difference');
83 model.geom('geom1').feature('matrix').selection('input').set({'blk2'});
84 model.geom('geom1').feature('matrix').selection('input2').set({'fracs'});
85 model.geom('geom1').feature('matrix').set('keep', 'on');
86 model.geom('geom1').feature('matrix').set('intbnd', 'off');
87
88 % allow the fractures and matrix to be grouped as collections of domains
89 % that can be next used to easily define material properties by allowing
90 % for them to be "selected" (very important)
91 model.geom('geom1').feature('fracs').set('createselection', 'on');

```

```

92 model.geom('geom1').feature('matrix').set('createselection', 'on');
93
94 % set surfaces as upper and lower boundary conditions and make them selectable
95 model.geom('geom1').feature.create('ps1', 'ParametricSurface');
96 model.geom('geom1').feature('ps1').set('parmax1', '1');
97 model.geom('geom1').feature('ps1').set('parmax2', '1');
98 model.geom('geom1').feature('ps1').setIndex('coord', '0', 0);
99 model.geom('geom1').feature('ps1').setIndex('coord', 's1', 1);
100 model.geom('geom1').feature('ps1').setIndex('coord', 's2', 2);
101 model.geom('geom1').feature('ps1').set('createselection', 'on');
102
103 model.geom('geom1').feature.create('ps2', 'ParametricSurface');
104 model.geom('geom1').feature('ps2').set('parmax1', '1');
105 model.geom('geom1').feature('ps2').set('parmax2', '1');
106 model.geom('geom1').feature('ps2').setIndex('coord', 's1', 0);
107 model.geom('geom1').feature('ps2').setIndex('coord', '0', 1);
108 model.geom('geom1').feature('ps2').setIndex('coord', 's2', 2);
109 model.geom('geom1').feature('ps2').set('createselection', 'on');
110
111 model.geom('geom1').feature.create('ps3', 'ParametricSurface');
112 model.geom('geom1').feature('ps3').set('parmax1', '1');
113 model.geom('geom1').feature('ps3').set('parmax2', '1');
114 model.geom('geom1').feature('ps3').setIndex('coord', '1', 0);
115 model.geom('geom1').feature('ps3').setIndex('coord', 's1', 1);
116 model.geom('geom1').feature('ps3').setIndex('coord', 's2', 2);
117 model.geom('geom1').feature('ps3').set('createselection', 'on');
118
119 model.geom('geom1').feature.create('ps4', 'ParametricSurface');
120 model.geom('geom1').feature('ps4').set('parmax1', '1');
121 model.geom('geom1').feature('ps4').set('parmax2', '1');
122 model.geom('geom1').feature('ps4').setIndex('coord', 's1', 0);
123 model.geom('geom1').feature('ps4').setIndex('coord', '1', 1);
124 model.geom('geom1').feature('ps4').setIndex('coord', 's2', 2);
125 model.geom('geom1').feature('ps4').set('createselection', 'on');
126
127 model.geom('geom1').feature.create('ps5', 'ParametricSurface');
128 model.geom('geom1').feature('ps5').set('parmax1', '1');
129 model.geom('geom1').feature('ps5').set('parmax2', '1');
130 model.geom('geom1').feature('ps5').setIndex('coord', 's1', 0);
131 model.geom('geom1').feature('ps5').setIndex('coord', 's2', 1);
132 model.geom('geom1').feature('ps5').setIndex('coord', '1', 2);
133 model.geom('geom1').feature('ps5').set('createselection', 'on');
134
135 model.geom('geom1').feature.create('ps6', 'ParametricSurface');
136 model.geom('geom1').feature('ps6').set('parmax1', '1');
137 model.geom('geom1').feature('ps6').set('parmax2', '1');

```

```

138 model.geom('geom1').feature('ps6').setIndex('coord', 's1', 0);
139 model.geom('geom1').feature('ps6').setIndex('coord', 's2', 1);
140 model.geom('geom1').feature('ps6').setIndex('coord', '0', 2);
141 model.geom('geom1').feature('ps6').set('createselection', 'on');
142
143 % create points to set the sources according the source position for each
144 % experiment
145 s = [0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9.5]/30;
146 source = load ('G:\Trabajos\Ingenieria Industrial\Internship\Workspace ...
    COMSOL\Random_fracts\SourceCoordX.txt');
147 for j = 1:size(s,2)
148     model.geom('geom1').feature.create('M', 'Point');
149     model.geom('geom1').feature('M').setIndex('p', num2str(source(2*j-1)+s(j)), 0);
150     model.geom('geom1').feature('M').setIndex('p', '0.5', 1);
151     model.geom('geom1').feature('M').setIndex('p', '1', 2);
152     model.geom('geom1').feature('M').set('createselection', 'on');
153     model.geom('geom1').feature.create('N', 'Point');
154     model.geom('geom1').feature('N').setIndex('p', num2str(source(2*j-1)+2*s(j)), 0);
155     model.geom('geom1').feature('N').setIndex('p', '0.5', 1);
156     model.geom('geom1').feature('N').setIndex('p', '1', 2);
157     model.geom('geom1').feature('N').set('createselection', 'on');
158
159     for k = 1:(size(source,2)/size(s,2))
160         model.geom('geom1').feature.create('A', 'Point');
161         model.geom('geom1').feature('A').setIndex('p', source(2*j+k-2), 0);
162         model.geom('geom1').feature('A').setIndex('p', '0.5', 1);
163         model.geom('geom1').feature('A').setIndex('p', '1', 2);
164         model.geom('geom1').feature('A').set('createselection', 'on');
165
166         % set boundary conditions
167         model.variable.create('var1');
168         model.variable('var1').model('mod1');
169         model.variable('var1').set('radius', ['sqrt((x-' num2str(source(2*j+k-2)) ...
            ')^2+(y-0.5)^2+(z-1)^2)']);
170         model.variable('var1').descr('radius', 'Radial distance from source');
171         model.variable('var1').set('alpha', '1/(radius^2)');
172         model.variable('var1').name('Mixed BC's');
173         model.variable.create('var2');
174         model.variable('var2').model('mod1');
175         model.variable('var2').set('sigma', '1e-8');
176         model.variable('var2').descr('sigma', 'Matrix conductivity');
177         model.variable('var2').name('Matrix Conductivity');
178         model.variable('var2').selection.geom('geom1', 3);
179         model.variable('var2').selection.named('geom1_matrix_dom');
180         model.variable.create('var3');
181         model.variable('var3').model('mod1');

```



```

182     model.variable('var3').set('sigma', '1e-2');
183     model.variable('var3').name('Fracture Conductivity');
184     model.variable('var3').selection.geom('geom1', 3);
185     model.variable('var3').selection.named('geom1.fracs.dom');
186
187     model.physics('ec').feature.create('ncd1', 'NormalCurrentDensity', 2);
188     model.physics('ec').feature('ncd1').set('nJ', 1, ['-sigma*alpha*' ...
        num2str(source(2*j+k-2)) '*V']);
189     model.physics('ec').feature('ncd1').selection.named('geom1.ps1.bnd');
190     model.physics('ec').feature.create('ncd2', 'NormalCurrentDensity', 2);
191     model.physics('ec').feature('ncd2').set('nJ', 1, '-sigma*alpha*0.5*V');
192     model.physics('ec').feature('ncd2').selection.named('geom1.ps2.bnd');
193     model.physics('ec').feature.create('ncd3', 'NormalCurrentDensity', 2);
194     model.physics('ec').feature('ncd3').set('nJ', 1, ['-sigma*alpha*' ...
        num2str(1-source(2*j+k-2)) '*V']);
195     model.physics('ec').feature('ncd3').selection.named('geom1.ps3.bnd');
196     model.physics('ec').feature.create('ncd4', 'NormalCurrentDensity', 2);
197     model.physics('ec').feature('ncd4').set('nJ', 1, '-sigma*alpha*0.5*V');
198     model.physics('ec').feature('ncd4').selection.named('geom1.ps4.bnd');
199     model.physics('ec').feature.create('ncd5', 'NormalCurrentDensity', 2);
200     model.physics('ec').feature('ncd5').set('nJ', 1, '-sigma*alpha*1*V');
201     model.physics('ec').feature('ncd5').selection.named('geom1.ps6.bnd');
202
203     model.physics('ec').feature.create('pcs1', 'PointCurrentSource', 0);
204     model.physics('ec').feature('pcs1').selection.named('geom1.A.pnt');
205     if k == 1
206         model.physics('ec').feature('pcs1').set('Qjp', 1, '10');
207     elseif k == 2
208         model.physics('ec').feature('pcs1').set('Qjp', 1, '-10');
209     end
210
211     model.physics('ec').feature('cucn1').set('sigma_mat', 1, 'userdef');
212     model.physics('ec').feature('cucn1').set('sigma', {'sigma' '0' '0' '0' 'sigma' '0' ...
        '0' '0' 'sigma'});
213
214     % run geometry and create mesh
215     model.geom('geom1').runAll;
216     model.mesh('mesh1').autoMeshSize(5);
217     model.mesh('mesh1').run;
218
219     % set solution properties
220     model.sol.create('sol1');
221     model.sol('sol1').study('std1');
222     model.sol('sol1').feature.create('st1', 'StudyStep');
223     model.sol('sol1').feature('st1').set('study', 'std1');
224     model.sol('sol1').feature('st1').set('studystep', 'stat');

```

```

225 model.sol('sol1').feature.create('v1', 'Variables');
226 model.sol('sol1').feature('v1').set('control', 'stat');
227 model.sol('sol1').feature.create('s1', 'Stationary');
228 model.sol('sol1').feature('s1').feature.create('fcl', 'FullyCoupled');
229 model.sol('sol1').feature('s1').feature.create('il', 'Iterative');
230 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('prefuntype', 'left');
231 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('maxlinit', 10000);
232 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('linsolver', 'cg');
233 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').set('rhob', 400);
234 model.sol('sol1').feature('s1').feature('fcl').set('linsolver', 'il');
235 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature.create('mg1', 'Multigrid');
236 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('prefun', 'amg');
237 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('iter', 2);
238 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mgcycle', 'v');
239 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mcasegen', 'any');
240 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('gmglevels', 1);
241 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('scale', 2);
242 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('massem', true);
243 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mkeep', false);
244 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('rmethode', 'longest');
245 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('mglevels', 5);
246 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('maxcoarsedof', 5000);
247 model.sol('sol1').feature('s1').feature('il').feature('mg1').set('amgauto', 3);
248 model.sol('sol1').feature('s1').feature.remove('fcDef');
249 model.sol('sol1').attach('std1');
250 model.sol('sol1').runAll;
251
252 % create point evaluation to get the potencial difference between M and
253 % N electrodes
254 model.result.numerical.create('pev1', 'EvalPoint');
255 model.result.numerical('pev1').selection.named('geom1.M.pnt');
256 model.result.table.create('tbl1', 'Table');
257 model.result.table('tbl1').comments('Delta-V (V-m)');
258 model.result.numerical('pev1').set('table', 'tbl1');
259 model.result.numerical('pev1').setResult;
260 model.result.numerical.create('pev2', 'EvalPoint');
261 model.result.numerical('pev2').selection.named('geom1.N.pnt');
262 model.result.numerical('pev2').set('table', 'tbl1');
263 model.result.numerical('pev2').appendResult;
264
265
266 % export the results
267 model.result.export.create('tbl1', 'tbl1', 'Table');
268 model.result.export('tbl1').set('filename', ['G:\Trabajos\Ingenier' ...
        native2unicode(hex2dec('00ed'), 'Cp1252') 'a Industrial\Internship\Workspace ...
        COMSOL\Random_fracts\Delta_V_3D\Delta.s' num2str(s(j)) '_' num2str(k) '.txt']);

```

```

269     model.result.export('tbl1').run;
270
271     % remove the existing model
272     model.geom('geom1').feature.remove('A');
273     model.variable.remove('var1');
274     model.variable.remove('var2');
275     model.variable.remove('var3');
276     model.physics('ec').feature.remove('ncd1');
277     model.physics('ec').feature.remove('ncd2');
278     model.physics('ec').feature.remove('ncd3');
279     model.physics('ec').feature.remove('ncd4');
280     model.physics('ec').feature.remove('ncd5');
281     model.physics('ec').feature.remove('pcs1');
282
283     model.result.numerical.remove('pev1');
284     model.result.numerical.remove('pev2');
285     model.result.table.remove('tbl1');
286     model.result.table.remove('tbl2');
287     model.sol.remove('sol1');
288     end
289     model.geom('geom1').feature.remove('M');
290     model.geom('geom1').feature.remove('N');
291 end
292
293 out = model;

```

Referencias

- ABEM, I. A. (2007), *Instruction manual, Terrameter SAS 1000 / 4000*.
- Alboin, C., J. Jaffré, P. Joly, J. E. Roberts, and C. Serres (2002), A comparison of methods for calculating the matrix block source term in a double porosity model for contaminant transport, *Computational Geosciences*, 6(3-4), 523–543.
- Ambikasaran, S., J. Y. Li, P. K. Kitanidis, and E. Darve (2013), Large-scale stochastic linear inversion using hierarchical matrices, *Computational Geosciences*, 17(6), 913–927.
- Anderssen, R., and E. Seneta (1971), A simple statistical estimation procedure for monte carlo inversion in geophysics, *pure and applied geophysics*, 91(1), 5–13.
- Anderssen, R., and E. Seneta (1972), A simple statistical estimation procedure for monte carlo inversion in geophysics. ii: Efficiency and hempel’s paradox, *pure and applied geophysics*, 96(1), 5–14.
- Backus, G. (1970), Inference from inadequate and inaccurate data, i, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 65(1), 1–7.
- Bateman, H. (1954), *Bateman Manuscript Project: Tables of Integral Transforms*, McGraw-Hill.
- Bear, G. W., H. J. Al-Shukri, and A. J. Rudman (1995), Linear inversion of gravity data for 3-d density distributions, *Geophysics*, 60(5), 1354–1364.
- Bear, J., C.-F. Tsang, and G. De Marsily (2012), *Flow and contaminant transport in fractured rock*, Academic Press.
- Belina, F., J. Irving, J. Ernst, and K. Holliger (2012), Analysis of an iterative deconvolution approach for estimating the source wavelet during waveform inversion of crosshole georadar data, *Journal of Applied Geophysics*, 78, 20–30.
- Berkowitz, B. (2002), Characterizing flow and transport in fractured geological media: A review, *Advances in Water Resources*, 25(8–12), 861–884, doi:10.1016/S0309-1708(02)00042-8.
- Berrone, S., S. Pieraccini, S. Scialoo, and F. Vicini (2015), A parallel solver for large scale dfn flow simulations, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(3), C285–C306.
- Bogdanov, I., V. Mourzenko, J.-F. Thovert, and P. Adler (2003), Effective permeability of fractured porous media in steady state flow, *Water Resources Research*, 39(1).
- Cacas, M., E. Ledoux, G. d. Marsily, B. Tillie, A. Barbreau, E. Durand, B. Feuga, and P. Peaudecerf (1990), Modeling fracture flow with a stochastic discrete fracture network: Calibration and validation: 1. the flow model, *Water Resources Research*, 26(3), 479–489.
- Carrera, J., X. Sanchez-Vila, I. Benet, A. Medina, G. Galarza, and J. Guimera (1998), On matrix diffusion: formulations, solution methods and qualitative effects, *Hydrogeology Journal*, 6(1), 178–190, doi:10.1007/s100400050143.

- Cheng, H., J. Huang, and T. J. Leiterman (2006), An adaptive fast solver for the modified helmholtz equation in two dimensions, *Journal of Computational Physics*, *211*(2), 616–637.
- Claerbout, J. F., and F. Muir (1973), Robust modeling with erratic data, *Geophysics*, *38*(5), 826–844.
- Coscia, I., N. Linde, S. Greenhalgh, T. Vogt, and A. Green (2012), Estimating traveltimes and groundwater flow patterns using 3d time-lapse crosshole ert imaging of electrical resistivity fluctuations induced by infiltrating river water, *Geophysics*, *77*(4), E239–E250.
- Culler, D. E., R. M. Karp, D. Patterson, A. Sahay, E. E. Santos, K. E. Schauser, R. Subramonian, and T. von Eicken (1996), Logp: A practical model of parallel computation, *Communications of the ACM*, *39*(11), 78–85.
- Dahl-Jensen, D., K. Mosegaard, N. Gundestrup, G. D. Clow, S. J. Johnsen, A. W. Hansen, and N. Balling (1998), Past temperatures directly from the greenland ice sheet, *Science*, *282*(5387), 268–271.
- De Dreuzy, J.-R., G. Pichot, B. Poirriez, and J. Erhel (2013), Synthetic benchmark for modeling flow in 3d fractured media, *Computers & Geosciences*, *50*, 59–71.
- Descloux, J. (1963), Approximations in l^p and chebyshev approximations, *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics*, *11*(4), 1017–1026.
- Dey, A., and H. Morrison (1979b), Resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures, *Geophysical prospecting*, *27*(1), 106–136, doi:10.1111/j.1365-2478.1979.tb00961.x.
- Dey, A., and H. F. Morrison (1979a), Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures, *Geophysics*, *44*(4), 753–780.
- Djilpéssé, H. A., and A. Tarantola (1999), Multiparameter l_1 norm waveform fitting: Interpretation of gulf of mexico reflection seismograms, *Geophysics*, *64*(4), 1023–1035.
- Dorn, C., N. Linde, T. Le Borgne, O. Bour, and M. Klepikova (2012), Inferring transport characteristics in a fractured rock aquifer by combining single-hole ground-penetrating radar reflection monitoring and tracer test data, *Water Resources Research*, *48*(11).
- Dverstorp, B., and J. Andersson (1989), Application of the discrete fracture network concept with field data: Possibilities of model calibration and validation, *Water Resources Research*, *25*(3), 540–550.
- Dykhuizen, R. (1990), A new coupling term for dual-porosity models, *Water Resources Research*, *26*(2), 351–356.
- Fernandez Martinez, J. L., M. Z. Fernandez Muniz, and M. J. Tompkins (2012), On the topography of the cost functional in linear and nonlinear inverse problems, *Geophysics*, *77*(1), W1–W15.
- Fox, M., T. Bodin, and D. L. Shuster (2015), Abrupt changes in the rate of andean plateau uplift from reversible jump markov chain monte carlo inversion of river profiles, *Geomorphology*, *238*, 1–14.

- Franklin, J. N. (1970), Well-posed stochastic extensions of ill-posed linear problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 31(3), 682–716.
- Gallardo, L., S. Fontes, M. Meju, M. Buonora, and P. de Lugao (2012), Robust geophysical integration through structure-coupled joint inversion and multispectral fusion of seismic reflection, magnetotelluric, magnetic, and gravity images: Example from Santos basin, offshore Brazil, *Geophysics*, 77(5), B237–B251.
- Gautam, P., and K. Mohanty (2004), Matrix–fracture transfer through countercurrent imbibition in presence of fracture fluid flow, *Transport in Porous Media*, 55(3), 309–337, doi:10.1023/B:TIPM.0000013326.95597.10.
- Greenhalgh, M. (2008), *DC Resistivity Modelling and Sensitivity Analysis in Anisotropic Media*, University of Adelaide, School of Chemistry and Physics, Discipline of Physics.
- Haggerty, R., and S. M. Gorelick (1995), Multiple-rate mass transfer for modeling diffusion and surface reactions in media with pore-scale heterogeneity, *Water Resources Research*, 31(10), 2383–2400.
- Haggerty, R., S. A. McKenna, and L. C. Meigs (2000), On the late-time behavior of tracer test breakthrough curves, *Water Resources Research*, 36(12), 3467–3479.
- Heath, S. C. (1997), Markov chain monte carlo segregation and linkage analysis for oligogenic models, *The American Journal of Human Genetics*, 61(3), 748–760.
- Herwanger, J., C. Pain, A. Binley, C. De Oliveira, and M. Worthington (2004), Anisotropic resistivity tomography, *Geophysical Journal International*, 158(2), 409–425.
- Huelsenbeck, J. P., F. Ronquist, et al. (2001), MrBayes: Bayesian inference of phylogenetic trees, *Bioinformatics*, 17(8), 754–755.
- Kfoury, M., R. Ababou, B. Noetinger, and M. Quintard (2004), Matrix-fracture exchange in a fractured porous medium: stochastic upscaling, *Comptes Rendus Mecanique*, 332(8), 679–686.
- Kirschvink, J. (1980), The least-squares line and plane and the analysis of palaeomagnetic data, *Geophysical Journal International*, 62(3), 699–718.
- Kleinman, R., and G. F. Roach (1982), On modified green functions in exterior problems for the helmholtz equation, in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 383, pp. 313–332, The Royal Society.
- Lee, S. H., M. Lough, and C. Jensen (2001), Hierarchical modeling of flow in naturally fractured formations with multiple length scales, *Water Resources Research*, 37(3), 443–455.
- Lewkowicz, A. G., B. Etzelmüller, and S. L. Smith (2011), Characteristics of discontinuous permafrost based on ground temperature measurements and electrical resistivity tomography, southern Yukon, Canada, *Permafrost and Periglacial Processes*, 22(4), 320–342.

- Li, L., S. H. Lee, et al. (2008), Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 11(04), 750–758.
- Li, Y., and K. Spitzer (2002), Three-dimensional DC resistivity forward modelling using finite elements in comparison with finite-difference solutions, *Geophysical Journal International*, 151(3), 924–934, doi:10.1046/j.1365-246X.2002.01819.x.
- Loke, M., and R. Barker (1995), Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudosections, *Geophysics*, 60(6), 1682–1690.
- Loke, M., J. Chambers, D. Rucker, O. Kuras, and P. Wilkinson (2013), Recent developments in the direct-current geoelectrical imaging method, *Journal of Applied Geophysics*, 95, 135–156.
- Long, J. C. S., and D. M. Billaux (1987), From field data to fracture network modeling: An example incorporating spatial structure, *Water Resources Research*, 23(7), 1201–1216, doi:10.1029/WR023i007p01201.
- Lowry, T., M. Allen, and P. Shive (1989), Singularity removal - A refinement of resistivity modeling techniques, *Geophysics*, 54(6), 766–774, doi:10.1190/1.1442704.
- Luo, X., and C. Foss (2013), Inverse of magnetic dipole field using a reversible jump markov chain monte carlo, *arXiv preprint arXiv:1310.0915*.
- McGillivray, P. R. (1992), Forward modeling and inversion of dc resistivity and mmr data, Ph.D. thesis, University of British Columbia.
- Megiddo, N. (1983), Applying parallel computation algorithms in the design of serial algorithms, *Journal of the ACM (JACM)*, 30(4), 852–865.
- Minsley, B. J. (2011), A trans-dimensional bayesian markov chain monte carlo algorithm for model assessment using frequency-domain electromagnetic data, *Geophysical Journal International*, 187(1), 252–272.
- Moreno, L., and I. Neretnieks (1993), Fluid flow and solute transport in a network of channels, *Journal of contaminant hydrology*, 14(3), 163–192.
- Moucha, R., and R. C. Bailey (2004), An accurate and robust multigrid algorithm for 2d forward resistivity modelling, *Geophysical prospecting*, 52(3), 197–212.
- Mundry, E. (1984), Geoelectrical Model Calculations for Two-Dimensional Resistivity DISTRIBUTIONS, *Geophysical Prospecting*, 32, 124–131, doi:10.1111/j.1365-2478.1984.tb00721.x.
- Nagata, K., M. Nakatani, and S. Yoshida (2008), Monitoring frictional strength with acoustic wave transmission, *Geophysical Research Letters*, 35(6).
- Nemeth, T., C. Wu, and G. T. Schuster (1999), Least-squares migration of incomplete reflection data, *Geophysics*, 64(1), 208–221.

- Noetinger, B., and T. Estebenet (2000), Up-scaling of double porosity fractured media using continuous-time random walks methods, *Transport in Porous Media*, 39(3), 315–337.
- Noetinger, B., T. Estebenet, and P. Landereau (2001), A direct determination of the transient exchange term of fractured media using a continuous time random walk method, *Transport in Porous Media*, 44(3), 539–557.
- Okay, G., P. Cosenza, A. Ghorbani, C. Camerlynck, J. Cabrera, N. Florsch, and A. Revil (2013), Localization and characterization of cracks in clay-rocks using frequency and time-domain induced polarization, *Geophysical Prospecting*, 61(1), 134–152.
- Painter, S., and V. Cvetkovic (2005), Upscaling discrete fracture network simulations: An alternative to continuum transport models, *Water resources research*, 41(2).
- Patriarca, C., S. Lambot, M. Mahmoudzadeh, J. Minet, and E. Slob (2011), Reconstruction of sub-wavelength fractures and physical properties of masonry media using full-waveform inversion of proximal penetrating radar, *Journal of Applied Geophysics*, 74(1), 26–37.
- Perera, M., P. Ranjith, S. Choi, and D. Airey (2012), Investigation of temperature effect on permeability of naturally fractured black coal for carbon dioxide movement: An experimental and numerical study, *Fuel*, 94, 596–605.
- Pichot, G., J. Erhel, and J.-R. de Dreuzy (2012), A generalized mixed hybrid mortar method for solving flow in stochastic discrete fracture networks, *SIAM Journal on scientific computing*, 34(1), B86–B105.
- Pidlisecky, A., and R. Knight (2008), Fw2.5d: A MATLAB 2.5-d electrical resistivity modeling code, *Computers & Geosciences*, 34(12), 1645–1654, doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.cageo.2008.04.001.
- Press, F. (1968), Earth models obtained by monte carlo inversion, *Journal of Geophysical Research*, 73(16), 5223–5234.
- Rücker, C., T. Günther, and K. Spitzer (2006), Three-dimensional modelling and inversion of dc resistivity data incorporating topography - I. Modelling, *Geophysical Journal International*, 166, 495–505, doi:10.1111/j.1365-246X.2006.03010.x.
- Robert, T., A. Dassargues, S. Brouyère, O. Kaufmann, V. Hallet, and F. Nguyen (2011), Assessing the contribution of electrical resistivity tomography (ert) and self-potential (sp) methods for a water well drilling program in fractured/karstified limestones, *Journal of applied geophysics*, 75(1), 42–53.
- Robert, T. J. (2012), Geophysical identification, characterization, and monitoring of preferential groundwater flow paths in fractured media, Ph.D. thesis, University of Bonn, Germany.
- Robinson, J., T. Johnson, and L. Slater (2015), Challenges and opportunities for fractured rock imaging using 3d cross-borehole electrical resistivity, *Geophysics*, 80(2), E49–E61.
- Rodas Posso, F. M. (1977), La transformada rápida de fourier, Ph.D. thesis, QUITO/EPN/1977.
- Rodrigue, G. (2014), *Parallel computations*, vol. 1, Elsevier.

- Rogers, S., D. Elmo, R. Dunphy, D. Bearinger, et al. (2010), Understanding hydraulic fracture geometry and interactions in the horn river basin through dfn and numerical modeling, in *Canadian Unconventional Resources and International Petroleum Conference*, Society of Petroleum Engineers.
- Rosas-Carbajal, M., N. Linde, T. Kalscheuer, and J. A. Vrugt (2013), Two-dimensional probabilistic inversion of plane-wave electromagnetic data: methodology, model constraints and joint inversion with electrical resistivity data, *Geophysical Journal International*, p. ggt482.
- Rothman, D. H. (1985), Nonlinear inversion, statistical mechanics, and residual statics estimation, *Geophysics*, 50(12), 2784–2796.
- Rotter, B., D. A. Barry, J. I. Gerhard, and J. Small (2011), Modeling the effectiveness of u (vi) biomineralization in dual-porosity porous media, *Journal of Hydrology*, 402(1), 14–24.
- Roubinet, D., and J. Irving (2014), Discrete-dual-porosity model for electric current flow in fractured rock, *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*, 119(2), 767–786, doi:10.1002/2013JB010668.
- Roubinet, D., J.-R. Dreuzy, and D. M. Tartakovsky (2012), Semi-analytical solutions for solute transport and exchange in fractured porous media, *Water Resources Research*, 48(1).
- Ruggeri, P., J. Irving, and K. Holliger (2015), Systematic evaluation of sequential geostatistical resampling within mcmc for posterior sampling of near-surface geophysical inverse problems, *Geophysical Journal International*, 202(2), 961–975.
- Sævik, P. N., I. Berre, M. Jakobsen, and M. Lien (2013), A 3d computational study of effective medium methods applied to fractured media, *Transport in porous media*, 100(1), 115–142.
- Sævik, P. N., M. Jakobsen, M. Lien, and I. Berre (2014), Anisotropic effective conductivity in fractured rocks by explicit effective medium methods, *Geophysical Prospecting*, 62(6), 1297–1314.
- Sahimi, M. (2011), *Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches*, John Wiley & Sons.
- Saibaba, A. K., and P. K. Kitanidis (2012), Efficient methods for large-scale linear inversion using a geostatistical approach, *Water Resources Research*, 48(5).
- Sarda, S., L. Jeannin, R. Basquet, B. Bourbiaux, et al. (2002), Hydraulic characterization of fractured reservoirs: simulation on discrete fracture models, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 5(02), 154–162.
- Sassen, D. S., and M. E. Everett (2009), 3d polarimetric gpr coherency attributes and full-waveform inversion of transmission data for characterizing fractured rock, *Geophysics*, 74(3), J23–J34.
- Sen, M. K., and P. L. Stoffa (2013), *Global optimization methods in geophysical inversion*, Cambridge University Press.

- Snyder, D. D. (1976), a Method for Modeling the Resistivity and IP Response of Two-Dimensional Bodies, *Geophysics*, *41*, doi:10.1190/1.1440677.
- Stroud, D. (1998), The effective medium approximations: Some recent developments, *Superlattices and microstructures*, *23*(3), 567–573.
- Tang, J.-t., F.-y. Wang, Z.-y. Ren, and R.-w. Guo (2010), 3-d direct current resistivity forward modeling by adaptive multigrid finite element method, *Journal of Central South University of Technology*, *17*, 587–592.
- Tarantola, A. (2005), *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, siam.
- Telford, W., W. M. Telford, L. Geldart, and R. Sheriff (1990), *Applied Geophysics*, Monograph series, Cambridge University Press.
- Trevino, E. G. (1979), Magnetometric resistivity (MMR) anomalies of two-dimensional structures, *Geophysics*, *44*, doi:10.1190/1.1440987.
- Warren, J., P. J. Root, et al. (1963), The behavior of naturally fractured reservoirs, *Society of Petroleum Engineers Journal*, *3*(03), 245–255.
- Watson, G. N. (1995), *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge university press.
- Xiao, K., C. Zou, B. Xiang, X. Yue, X. Zhou, J. Li, and B. Zhao (2014), Log response of ultrasonic imaging and its significance for deep mineral prospecting of scientific drilling borehole-2 in nanling district, china, *Journal of Geophysics and Engineering*, *11*(5), 055,003.
- Xu, C., P. Dowd, and D. Wyborn (2013), Optimisation of a stochastic rock fracture model using markov chain monte carlo simulation, *Mining Technology*, *122*(3), 153–158.
- Xu, S., B. Duan, and D. Zhang (2000), Selection of the wavenumbers k using an optimization method for the inverse Fourier transform in 2.5D electrical modelling, *Geophysical Prospecting*, *48*(5), 789–796, doi:10.1046/j.1365-2478.2000.00210.x.
- Zhao, S., and M. Yedlin (1996), Some refinements on the finite-difference method for 3-D dc resistivity modeling, *Geophysics*, *61*(5), 1301–1307, doi:10.1190/1.1444053.
- Zimmerman, R. W., G. Chen, T. Hadgu, and G. S. Bodvarsson (1993), A numerical dual-porosity model with semi-analytical treatment of fracture/matrix flow, *Water resources research*, *29*(7), 2127–2137.
- Zyvoloski, G. A., B. A. Robinson, and H. S. Viswanathan (2008), Generalized dual porosity: A numerical method for representing spatially variable sub-grid scale processes, *Advances in Water Resources*, *31*(3), 535–544.